
超图
——有限集的组合学
[法] C. 贝尔热 著
卜月华 张克民 译
东南大学出版社

# 超　图

## ——有限集的组合学

[法]C. 贝尔热　著

卜月华　张克民　译

东南大学出版社

·南　京·

## 内容提要

本书第一部分是贝尔热"超图"译著。它论述了基本概念、横贯和匹配、分数横贯、着色、二部图在超图中的推广和拟阵中的着色等内容及其应用。全书内容丰富，系统性强，其中不少内容处在本方向的前沿，还附了大量文献。在每章后面搜集了相关的问题和习题，作为正文的延伸和拓广。本书第二部分将全部习题作了解答，使读者能更全面地掌握本方向的内容。

本书填补了目前国内尚无中文的"超图"专著和教材的空白。它可作为数学系高年级学生和研究生相关课程的教材，也可作为从事这方面工作的教学、科研人员的参考书。

本书已由作者本人正式授权出版中文版
图字:10-2001-061号

图书在版编目(CIP)数据

超图——有限集的组合学/[法]C. 贝尔热著;卜月华，张克民译. —南京:东南大学出版社,2002.7
ISBN 7-81050-955-1

Ⅰ.超...　Ⅱ.①贝...②卜...③张...　Ⅲ.超图
Ⅳ.O157.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第014982号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼2号　邮编210096)
出版人:宋增民
江苏省新华书店经销　　华东有色地研所印刷厂印刷
开本:700 mm×1000 mm　1/16　印张:14.75　字数:281千字
2002年8月第1版　2002年8月第1次印刷
定价:28.00元
(凡因印装质量问题，可直接向发行科调换。电话:025-3792327)

# 翻译说明

超图——有限集的组合学，目前国内还没有一本合适的中文教材，但这部分内容又是组合学中重要的内容之一。以上原因促使我们萌发了翻译C.贝尔热教授的这本关于超图的专著。尽管此书写成于20世纪80年代末，时间已过去10多年，好在这一时期超图发展并不迅速，从而它仍可作为这部分内容的研究生教材。我们非常高兴和荣幸得到C.贝尔热教授的同意，将它翻译成中文译本。在此我们向C.贝尔热教授表示衷心的感谢！

本书翻译参考了它的英译本。原书及英译本中有一些错误，在一般情况下，我们根据上下文及数学本身的内容给予改正，而不在译文中一一指出。仅个别重要处，以脚注的形式加以指明，在此作一说明。

本书的习题，除了和其他数学教材中所附的习题一样，是使读者掌握本学科的内容和方法的一个手段，另一方面由于组合学这门学科的特殊性，其习题还是相应章节内容的延伸和拓广。不少习题本身就是一条定理，是非常有用的结果，仅因篇幅限制或其他原因，作者未将它写入相应章节。因此把习题加以解答，对读者更全面地掌握本方向的内容是有好处的。出于上述考虑，我们把习题解答作为本书的第二部分。本书曾在南京大学研究生教育中数次被采用，不少题目的解答是由学生给出的，这些学生包括：王维凡、周国飞、吕长虹、苗正科、潘林强、陈耀俊等，在此向他们表示感谢！

正如上面所指出的那样，做习题是掌握本学科的内容和方法的一种有效手段，因而我们希望读者不要一开始就看解答。这绝不是我们的初衷。必须先自己动手去做，这样才会有所收益。同时也希望读者能认识到，这里提供的解答仅仅是其中的一种方法，绝不要认为是最好的方法，或许比题解中更好的方法经过你们的努力被发现和创造。这里仅仅是抛砖引玉而已。

本书的出版得到浙江省重点学科（浙师大基础数学）基金的资助，在此也表示感谢！

最后，需要指明的是由于我们的水平和知识有限，缺点和错误在所难免，还望读者和方家指正，在此表示感谢！

译著者

2001年春

于浙江师范大学·金华

# 前　言

在过去的四十几年里，图论已被证明是解决几何、数论、运筹学和优化等领域中各种组合问题非常有用的工具。为了解决更多的组合问题，把图的概念进行推广是非常自然的事情。

用这种观点来研究集簇的思想大约始于1960年前后。关于把集簇中每个集合看作为"广义的边"，把集簇本身称为"超图"的思想，起初是为了推广图论中一些经典的结果，如 Turán 定理和 König 定理。后来，人们注意到这种推广往往会带来不少便利，且可把图论中的一些定理用统一的、简单的形式加以陈述。正是基于上述考虑，在本书中尽量给出超图中我们认为最有意义的结果。

此外，当所给的矩阵具有某种特殊性质时，超图理论是解决整数优化问题的非常有用的工具。在第4章，读者会涉及时间表问题，在第5章会涉及定位问题等，书中把这些问题用超图的语言来描述并给出了一般的算法，使得超图理论的应用给从事运筹学和数学规划的专家留下深刻的印象。对于纯数学家，本书包含了并非从图论中产生的关于集系的几个一般的结果。图的概念在这时对这些结果提供了一个直观的框架，使它们更容易被理解。

在每一章的后面搜集了一些相关的习题，我们认为这对基础数学或应用数学的学生来说是必要的。有些问题至今尚未解决。但绝大多数只要直接应用组合设计、有向图、拟阵等理论即可解决。这样的问题很多，限于篇幅，我们不可能都把它们包含在正文中。

我们衷心感谢 Michel Las Vergnas 以及 Dominique de Werra 和 Dominique de Caen 在本书写作过程中的帮助。另外我们还要感谢纽约大学允许我们把1985年在纽约讲课时的部分章节写入本书中。

C. 贝尔热

(Claude Berge)

注：书中很长的证明和特别困难的证明在相应位置上加上"*"，首次阅读本书的读者可先跳过它不读。

# 目　　录

# 第 1 章　基本概念

## 1　对偶超图

令 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是一个有限集。关于 $X$ 上的一个超图 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 是 $X$ 上一个有限子集簇，使得

(1) $E_i \neq \emptyset \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$

(2) $\bigcup_{i=1}^{m} E_i = X$

一个超图 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 若还满足

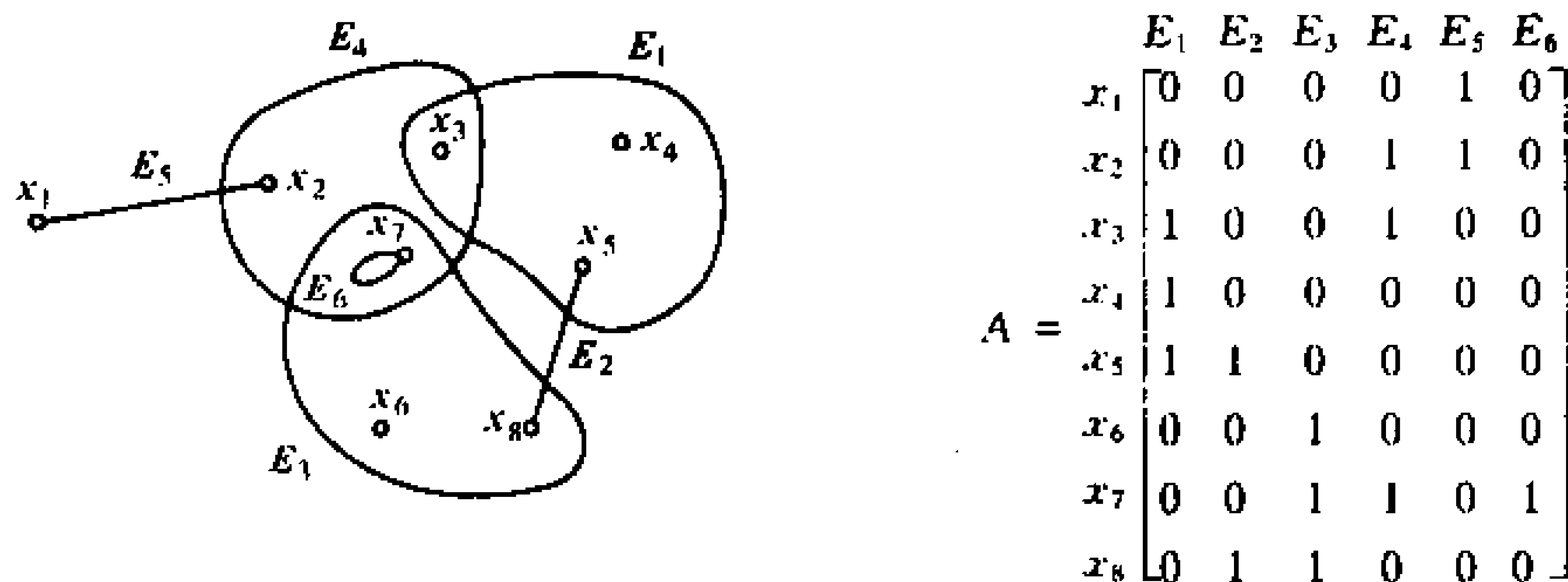
(3) $E_i \subset E_j \Rightarrow i = j$

则称 $H$ 为简单超图(或"Sperner 簇")。

在超图 $H$ 中，$X$ 的元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为顶点，集合 $E_1, E_2, \cdots, E_m$ 称为边。简单图是一个每条边均含 2 个顶点的简单超图；一个多重图(有环和重边)是一个每条边含不超过 2 个顶点的超图。这里我们不考虑类似于图中孤立点的顶点。

超图 $H$ 可以用图形来表示，即由点的集合表示 $X$ 中的元素。当 $|E_j| = 2$ 时，就用一条连接 $E_j$ 中两个元素的连续曲线表示 $E_j$；当 $|E_j| = 1$，用一个包含 $E_j$ 中唯一元素的环表示 $E_j$；当 $|E_j| \geqslant 3$，用一条包含 $E_j$ 中所有元素的简单闭曲线表示 $E_j$。

一个超图也可以由一个关联矩阵 $A = (a_{ij})$ 来表示，$A$ 中的 $m$ 列分别对应 $H$ 的 $m$ 条边 $E_1, E_2, \cdots, E_m$，$n$ 行分别对应 $H$ 的 $n$ 个顶点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。当 $x_i \notin E_j$ 时，$a_{ij} = 0$；当 $x_i \in E_j$ 时，$a_{ij} = 1$(见图 1)。




$$
A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \end{array}
$$

**图 1　超图 $H$ 的表示和它的关系矩阵**

$X$ 上超图 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 的对偶是超图 $H^* = (X_1, X_2 \cdots, X_n)$，其中的顶点对应 $H$ 中的边，而边为

$$X_i = \{e_j \mid 在 H 中, x_i \in E_j\}$$

$H^*$ 显然满足条件(1)和(2)。

易见 $H^*$ 的关联矩阵是 $H$ 的关联矩阵的转置，所以有$(H^*)^* = H$。

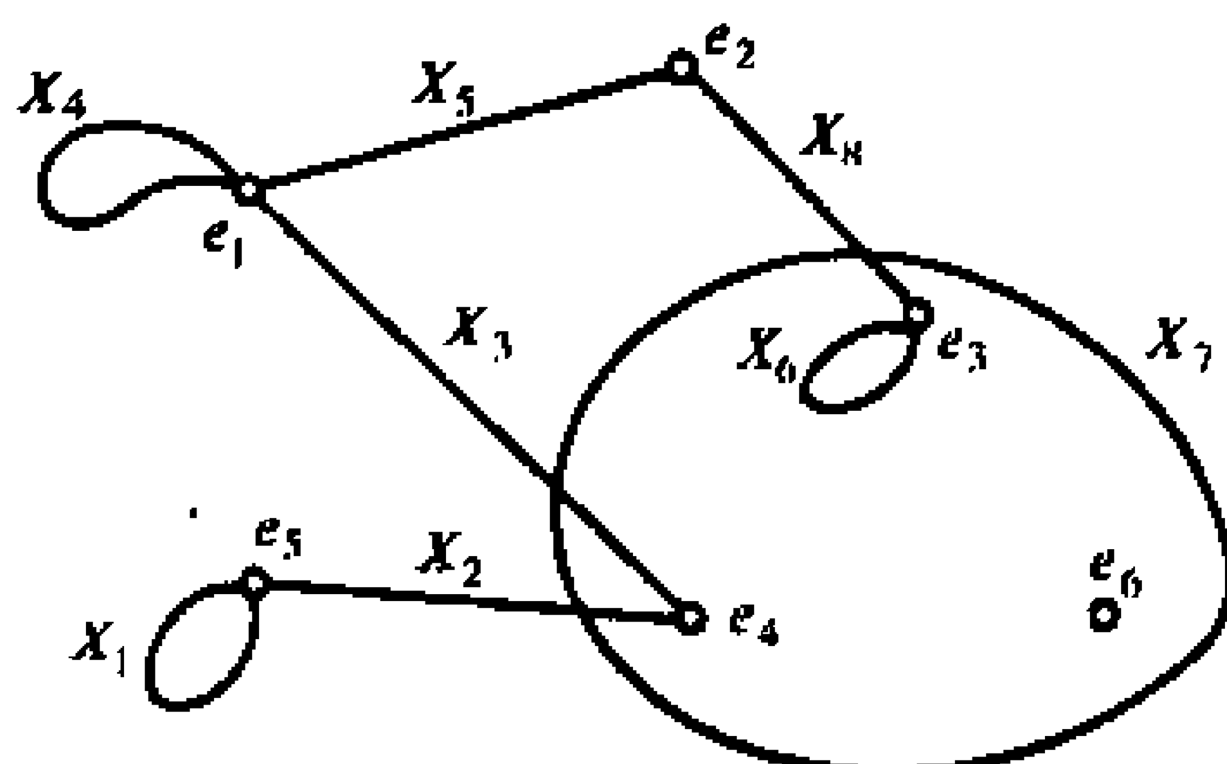



**图 2　图 1 中超图的对偶超图**

与图类似，超图 $H$ 的顶点数称为$H$ 的阶，用 $n(H)$ 表示。边数用 $m(H)$ 表示。此外，$r(H) = \max_j |E_j|$ 称为**秩**，$s(H) = \min_j |E_j|$ 称为**下秩**；如果 $r(H) = s(H)$，则称 $H$ 是**一致超图**；秩为 $r$ 的简单一致超图称为 **$r$- 一致超图**，此时尽管不含"简单"二字，仍被认为是不含重边。

对集合 $J \subset \{1,2,\cdots,m\}$，称

$$H' = (E_j \mid j \in J)$$

为 $J$ 对 $H$ 诱导的**部分超图**。$H'$ 的顶点集是 $X$ 的一个非空子集。

对集合 $A \subset X$，称

$$H_A = (E_j \cap A \mid 1 \leqslant j \leqslant m, E_j \cap A \neq \emptyset)$$

为 $A$ 对 $H$ 的**导出子超图**。

**性质**　$H$ 的子超图的对偶是对偶超图 $H^*$ 的部分超图。

秩为 2 的超图就是熟知的图。图论中所有概念可推广到超图中，并可获得更强的结果，应用更为广泛。此外，用超图的语言论证组合问题中的一些结果有时会显得更加简洁，甚至一个较强的结果会比一个较弱的结果更容易证明。

## 2　度

图论中的其他一些定义，下面可以毫不费力地推广到超图中。

对 $x \in X$，定义以 $x$ 为心的**星**$H(x)$ 为 $H$ 中所有含$x$ 的边所导出的部分超图。$x$ 的**度**$d_H(x)$ 是指 $H(x)$ 中的边数，即 $d_H(x) = m(H(x))$。

超图 $H$ 的最大度记为

$$\Delta(H) = \max_{x \in X} d_H(x)$$

所有顶点有相同度的超图称为**正则的**。

注意到 $\Delta(H) = r(H^*)$，故正则超图的对偶是一致超图。

对 $n$ 阶超图$H$，令 $d_H(x_i) = d_i$，并按非增 $n$- 序列$d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$ 来排序

所成的度序列，当 $H$ 是简单图时，上述度序列能被刻画（见 Erdös, Gallai[1960]，Graphs，第 6 章，定理 6）。一般地，有下面的性质 1。

**性质 1**　一个 $n$- 序列 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$ 是一个秩为 $r$ 的 $n$ 阶一致超图（允许有重边）的度序列的充要条件是：

(1) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 是 $r$ 的倍数

(2) $d_i \geqslant 1 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$

(3) [①] $\sum_{i=1}^{n} d_i / r \geqslant d_1$

**证**　对于上述给定的 $n$- 序列 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$，逐次在顶点集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 上构造超图 $H$ 的边。

第一步，对每一顶点 $x_i$ 赋予一个权 $d_i^1 = d_i$。第一条边 $E_1$ 由对应权 $d_i^1$ 中最大的前 $r$ 个顶点组成。

第二步，对每个顶点 $x_i$ 赋权为

$$d_i^2 = \begin{cases} d_i^1 & 若\ x_i \notin E_1 \\ d_i^1 - 1 & 若\ x_i \in E_1 \end{cases}$$

$E_2$ 由对应权 $d_i^2$ 中最大的前 $r$ 个顶点组成。由 (3) 知，这过程可一直进行。若 $\sum_{i=1}^{m} d_i = mr$，则可得边为 $E_1, E_2, \cdots, E_m$，且满足 $d_H(x_i) = d_i \ (i = 1,2,\cdots,n)$ 的超图 $H$。

一个超图是连通的，如果它的边所产生的交图是连通的，则有下面的性质 2。

**性质 2**（Tusyadej[1978]）　一个 $n$- 序列 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$ 是连通的 $r$- 一致超图的度序列的充要条件是：

(1) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 是 $r$ 的倍数

(2) $d_i \geqslant 1 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$

(3) $\sum_{i=1}^{n} d_i \geqslant \dfrac{r(n-1)}{r-1}$

(4) $d_1 \leqslant m = \dfrac{\sum d_i}{r}$

（上述结果可推广到非一致超图，见 Boonyasombat[1984]）

**定理 1**（Gale[1957], Ryser[1957]）　给定 $m$ 个整数 $r_1, r_2, \cdots, r_m$ 和一个 $n$- 序

---

① 原文中没有这一条件，但证明充分性时需这一条件。例如序列 5,3,2,1,1，就不是秩为 3 的一致超图的度序列。

列 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$，则存在顶点集为 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的超图 $H$，使得 $d_H(x_i) = d_i \ (i \leqslant n)$ 和 $|E_j| = r_j \ (j \leqslant m)$ 的充要条件是：

(1) $\sum_{j=1}^{m} \min\{r_j, k\} \geqslant d_1 + d_2 + \cdots + d_k \qquad (k < n)$

(2) $\sum_{j=1}^{m} r_j = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$

**证**　由网络流理论直接推出这定理(参见 Graphs，第 5 章，定理 2 的推论)，为此，构造一个网络：其顶点为 $j = 1, 2, \cdots, m$ 和 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，发点为 $a$，收点为 $z$，它的弧为：

· 所有弧$(a, j)$ 赋予容量 $r_j \ (j = 1, 2, \cdots, m)$；

· 所有弧$(x_i, z)$ 赋予容量 $d_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$；

· 所有弧$(j, x_i)$ 赋予容量 1 $(1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant i \leqslant n)$。

于是，只需证明存在一个满足上述容量的整数流，且饱和每一条进入收点 $z$ 的弧$(j, z)$ 即可，即对任意 $I \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$，进入集合$\{x_i \mid i \in I\}$ 的最大流的流量总是大于或等于 $\sum_{i \in I} d_i$。定理中条件(1)，(2) 恰保证了这一点。

**未解决问题**　找一个 $m$- 元组$(r_j)$ 和 $n$- 元组$(d_i)$ 分别表示某个简单超图 $H$ 的$|E_j|$ 和$d_H(x_i)$ 的充要条件。

令 $r, n$ 是整数，$1 \leqslant r \leqslant n$，$X$ 为 $n$ 元集合，定义 $X$ 上一个 $n$ 阶 $r$- 一致完全超图 $K_n^r$，其边集由 $X$ 的所有 $r$ 元子集所组成。下面陈述 Sperner 的定理[1926]，其中不等式(1) 的简单证明最近由 Yamamoto，Meshalkin，Lubell 和 Bollobás 各自独立给出。

**定理 2** (Sperner[1928]，证明由 Yamamoto，Meshalkin，Lubell，Bollobás 给出)　每一个 $n$ 阶简单超图 $H$ 满足

(1) $\sum_{E \in H} \binom{n}{|E|}^{-1} \leqslant 1$

此外，边数 $m(H)$ 满足

(2) $m(H) \leqslant \binom{n}{[n/2]}$

当 $n = 2h$ 为偶数时，(2) 中等号成立当且仅当 $H$ 是 $K_n^h$。当 $n = 2h + 1$ 时，(2) 中等号成立当且仅当 $H$ 是 $K_n^h$ 或 $K_n^{h+1}$。

**证**　令 $X$ 是一个 $n$ 元有限集。构造有向图 $G$：其顶点集为 $X$ 的所有子集簇 $\mathcal{P}(x)$，当且仅当 $A, B \subset X$，且$|A| = |B| - 1$ 时，从 $A$ 指向 $B$ 有一条弧。

对于 $E \in H$，在 $G$ 中从顶点 $\varnothing$ 到顶点 $E$ 的路的条数是$|E|!$。注意到 $H$ 是简单超图，当 $E', E \in H, E' \neq E$ 时，过 $E$ 的路不能再过 $E'$。因此从 $\varnothing$ 到 $X$ 的路的总数是：

$$n! \geqslant \sum_{E \in H} |E|!(n-|E|)!$$

故不等式(1) 成立。

对于(2) 式,由于

$$\binom{n}{|E|} \leqslant \binom{n}{[n/2]}$$

因此

$$1 \geqslant \sum_{E \in H} \binom{n}{|E|}^{-1} \geqslant m(H)\binom{n}{[n/2]}^{-1}$$

所以(2) 式成立。

令 $H$ 是使(2) 中等号成立的超图,则对所有 $E \in H$,有下面的(3):

(3) $\binom{n}{|E|} = \binom{n}{[n/2]}$

若 $n = 2h$ 是偶数,(3) 式蕴含着 $H$ 是$h$- 一致超图,再由于 $m(H) = \binom{n}{h}$,故 $H = K_n^h$。

若 $n = 2h + 1$,(3) 式蕴含着对一切 $E \in H, h \leqslant |E| \leqslant h + 1$。$G$ 中顶点集 $X_k$ 表示 $H$ 中基数为 $k$ 的边集,则 $X_h \cup X_{h+1}$ 是 $G$ 中的独立集,且 $m(H) = |X_h \cup X_{h+1}|$。

在图 $G$ 中,$X_h$ 的出弧等于 $|X_h|(n-h)$ 条,$X_h$ 的象 $\Gamma X_h$ 的入弧有 $|\Gamma X_h|(h+1)$ 条,因此有

$$|\Gamma X_h|(h+1) \geqslant |X_h|(n-h)$$

即

$$|\Gamma X_h| \geqslant \frac{2h+1-h}{h+1}|X_h| = |X_h|$$

若 $X_h$ 非空且又不等于 $\mathscr{P}_h(X) = \{A \mid A \subset X, |A| = h\}$,由于$h$- 子集和$(h+1)$- 子集全体在 $G$ 中所导出的二部子图的底图是连通的,故上述不等式是严格的。因而有

$$\begin{aligned} m(H) &= |X_h| + |X_{h+1}| \leqslant |X_h| + |\mathscr{P}_{h+1}(X) - \Gamma X_h| \\ &< |X_h| + \binom{n}{h+1} - |X_h| = \binom{n}{h+1} \end{aligned}$$

所以(2) 中等式成立仅当 $X_h = \varnothing$ 或 $X_h = \mathscr{P}_h(X)$,即 $H = K_n^h$ 或 $H = K_n^{h+1}$。

关于定理 2 的推广可参见:Erdös[1945],Kleitman[1968],Meshalkin[1963],Kleitman[1965],Greene,Kleitman[1976],Katona[1966],Hochberg,Hirsch[1970],Erdös,Frankl,Katona[1984]。

为了推广无悬挂点的图,考虑如下一类超图:超图 $H$ 称为**可分离的**,如果对任

一顶点 $x$,$H$ 中所有含 $x$ 的边的交集是 $\{x\}$,即 $\bigcap_{E\in H(x)} E = \{x\}$。

**推论** 如果 $n$- 正整数序列 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$ 是一个可分离超图 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_n)$ 的度序列,则

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{m}{d_i}^{-1} \leqslant 1$$

事实上,$H$ 是可分离的当且仅当其对偶 $H^*$ 是简单超图,于是由定理 2 有

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{m}{|X_i|}^{-1} \leqslant 1$$

为了推广简单图,我们称超图 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 是**线性的**,如果对 $i \neq j$,$|E_i \cap E_j| \leqslant 1$。如图 1,2 中的超图均是线性的。

下面直接可得:

**性质 3** 线性超图的对偶也是线性的。

事实上,如果 $H$ 是线性的,则 $H^*$ 中两条边 $X_i$ 和$X_j$ 的交不含两个不同的顶点 $e_1, e_2$,否则,在 $H$ 中就有 $\{x_i, x_j\} \subset E_1$, $\{x_i, x_j\} \subset E_2$,这与 $|E_1 \cap E_2| \leqslant 1$ 矛盾。

**定理 3** $H$ 是一个 $n$ 阶线性超图,则

(1) $\sum_{E\in H}\binom{|E|}{2} \leqslant \binom{n}{2}$

如果 $H$ 是 $r$- 一致超图,则其边数满足

(2) $m(H) \leqslant \dfrac{n(n-1)}{r(r-1)}$

(2) 式中等号成立当且仅当 $H$ 是 Steiner 系 $S(2, r, n)$。

因为 $H$ 是线性的,故含在同一条边中的点对数有

$$\sum_{E\in H}\binom{|E|}{2} \leqslant \binom{n}{2}$$

即(1) 式成立。如果 $H$ 又是 $r$- 一致的,则(2) 式成立。

Steiner 系 $S(2, r, n)$ 是 $n$ 元集$X$ 上满足每一对点恰好含在一条边中的$r$- 一致超图。T.P.Kirkman[1847] 给出:$S(2,3,n)$ 系存在的充要条件是 $n \equiv 1$ 或 3(mod 6)。

为了排除某些 $r$ 的值,考察 $S(2, r, n)$ 系存在的必要条件:

(1) $\binom{n}{2}\binom{r}{2}^{-1}$ 是整数;

(2) $(n-1)(r-1)^{-1}$ 是整数。

对 $r = 3, 4$,这两个条件是充分和必要的(Hanani)。对 $r = 6$,除 $S(2,6,21)$ 系不存在外,这些条件是充分的。Wilson[1972] 进一步证明,如果 $r$ 是一个素数幂及$n$ 充分大,则(1) 和(2) 是充分和必要的。

关于 $S(2, r, n)$ 系的存在性和计数问题可参见 Lindner 和 Rosá[1980],下面给

出当 $r,n$ 较小时存在 $S(2,r,n)$ 的表：

| | |
|---|---|
| $S(2,3,7)$ | |
| $S(2,3,9)$ | De Pasquale[1899], Brunel[1901], Cole[1913] |
| $S(2,4,13)$ | De pasquale[1899], Brunel[1901], Cole[1913] |
| $S(2,3,15)$ | Cole[1917], White[1919], Fischer[1940] |
| $S(2,4,16)$ | Witt[1938] |
| $S(2,3,19)$ | Deherder[1976] |
| $S(2,3,21)$ | Wilson[1974] |
| $S(2,5,21)$ | Witt[1938] |
| $S(2,3,25)$ | Wilson[1974] |
| $S(2,4,25)$ | Brouwer, Rokowska[1977] |
| $S(2,5,25)$ | McInnes[1977] |
| $S(2,3,27)$ | McInnes[1977] |
| $S(2,4,28)$ | Rokowska[1977] |

当 $n=7, r=3$ 或 $n=9, r=3$ 等时，可证明定理 3 中(2)的上界是最好的。

## 3　交簇

$H$ 是一个超图，若 $H$ 的边集两两交非空，则称该边集为一个**交簇**。例如，对 $H$ 的一个顶点 $x$，星 $H(x)=\{E \mid E\in H, x\in E\}$ 是 $H$ 的一个交簇。用 $\Delta_0(H)$ 表示 $H$ 的交簇中的最大基数，则

$$\Delta_0(H)\geqslant \max_{x\in X}|H(x)|=\Delta(H)$$

在一个多重图中，交簇只能是星和三角形(允许三角形含多重边)。

**定理 4**　$H$ 是无重边的 $n$ 阶超图，则

$$\Delta_0(H)\leqslant 2^{n-1}$$

此外，$n$ 元集合的所有子集构成的超图中，交簇的最大基数是 $2^{n-1}$。

**证**　令 $\mathscr{A}$ 是 $n$ 元集 $X$ 的子集构成的超图的最大交簇。

如果 $B_1\notin\mathscr{A}$，则由 $\mathscr{A}$ 的最大性，存在 $A_1\in\mathscr{A}$ 与 $B_1$ 不相交；因此 $X-B_1\supset A_1$，因而对任给的 $A\in\mathscr{A}$，$(X-B_1)\cap A\neq\varnothing$。再由 $\mathscr{A}$ 的最大性，推出 $(X-B_1)\in\mathscr{A}$。反之，如果 $(X-B_1)\in\mathscr{A}$，就有 $B_1\notin\mathscr{A}$。所以

$$B\rightarrow X-B$$

是从 $\mathscr{P}(X)-\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{A}$ 的双射，因此

$$|\mathscr{A}|=\frac{1}{2}|\mathscr{P}(X)|=2^{n-1}$$

**引理**(Greene, Katona, Kleitman[1976], Bollobás 在此以前已得到)　令 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是一列依序排列在一个圆圈上的点。令 $\mathscr{A}=(A_1, A_2, \cdots, A_m)$ $(A_i\neq\varnothing)$ 是

圈区间簇，满足

(1) $|A_i| \leqslant \frac{n}{2}$ $(i \leqslant m)$

(2) $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ （对所有的 $i,j$）

(3) $A_i \not\subset A_j$ （对所有的 $i,j,i \neq j$）

则有

(4) $m \leqslant \min\limits_i |A_i|$

(5) $\sum\limits_{i=1}^{m} |A_i|^{-1} \leqslant 1$

(5) 中等号成立当且仅当 $\mathscr{A}$ 是基数均为 $m$ 且有公共顶点的圈区间簇。

**证** 令 $A_1$ 是 $\mathscr{A}$ 中基数最小的子集。由(2)，对 $i \neq 1, A_1 \cap A_i \neq \emptyset$；再由(3)，$A_1 \cap A_i$ 是圈中一个区间，这区间有且仅有一个端点与 $A_1$ 的端点重合。由(3)可推得这些区间 $A_1 \cap A_i$ 互不相同。因此上述形式的区间总数至多是 $2(|A_1|-1)$。注意到由条件(1)和(2)，当 $i,j \neq 1, i \neq j$ 时，$A_1 \cap A_i$ 和 $A_1 \cap A_j$ 不可能构成 $A_1$ 的剖分。因此上述形式的区间只能出现一半，于是有 $m-1 \leqslant |A_1|-1$。故对所有 $i \leqslant m$，$|A_i| \geqslant |A_1| \geqslant m$。从而(4)和(5)成立。

最后，若(5)中等号成立，则

$$1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{|A_i|} \leqslant \frac{m}{|A_1|} \leqslant 1$$

故有 $|A_i| = |A_1| = m$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$。这样 $A_i$ 均为长是 $m$ 的区间，并且这些区间的起点位于该圈中连续的 $m$ 个点。反之，若 $A_i$ 满足(1),(2),(3)及每个区间的长为 $m$，(5)中等号显然成立。

**定理 5** (Erdös, Chao-Ko, Rado [1961]，这里证明由 Greene, Katona, Kleitman [1976] 给出) $H$ 是 $n$ 阶简单交超图且秩 $r \leqslant \frac{n}{2}$，则

(1) $\sum\limits_{E \in H} \binom{n-1}{|E|-1}^{-1} \leqslant 1$

(2) $m(H) \leqslant \binom{n-1}{r-1}$

此外，当 $H$ 是 $K_n^r$ 的星时，(2)中等号成立（反过来，则须加条件 $r < \frac{n}{2}$）。

下面简称定理 5 为 EKR 定理。

**证** 令 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 $H$ 的顶点集。$\pi$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个置换，记

$$H_\pi = (E \mid E \in H, E \text{ 是圈序列 } x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \cdots, x_{\pi(n)}, x_{\pi(1)} \text{ 中一个区间})$$

对 $E \in H$，置

$$\beta(E) = |\{\pi \mid E \in H_\pi\}|$$

由引理，可得下面的(3)：

(3) $\sum\limits_{E\in H_\pi} \frac{1}{|E|} \leqslant 1$

因此有

(4) $\sum\limits_{E\in H} \frac{\beta(E)}{|E|} = \sum\limits_{E\in H} \sum\limits_{\pi|E\in H_\pi} \frac{1}{|E|} = \sum\limits_{\pi} \sum\limits_{E\in H_\pi} \frac{1}{|E|} \leqslant n!$

令 $E_0 \in H$,且 $|E_0| = h$。又令 $x_0 \in E_0$。由于 $E_0$ 也是超图 $K_n^h(x_0) = H'$ 中的一条边,对 $H'$ 应用引理,则(3),(4) 中等号均成立。注意到

$$\frac{\beta(E_0)}{|E_0|} = \frac{1}{m(H')}\sum_{E'\in H'} \frac{\beta(E')}{|E'|} = \frac{n!}{m(H')} = n!\binom{n-1}{|E_0|-1}^{-1}$$

代入(4),可得

$$\sum_{E\in H}\binom{n-1}{|E|-1}^{-1} = \frac{1}{n!}\sum_{E\in H}\frac{\beta(E)}{|E|} \leqslant \frac{n!}{n!} = 1$$

因此,(1) 成立。

最后对任一 $E \in H$ 均满足 $|E| \leqslant r \leqslant \frac{n}{2}$,于是有

$$m(H)\binom{n-1}{r-1}^{-1} \leqslant \sum_{E\in H}\binom{n-1}{|E|-1}^{-1} \leqslant 1$$

故(2) 成立。

定理 5 的各种推广可参见 Schönheim [1968] ,Hilton 和 Milner [1967] ,Hilton [1979] ,Erdös,Chao-Ko,Rado [1961] ,Bollobás [1974] ,Frankl [1975] ,Frankl [1976]。

若对秩不加限制,则用类似的方法可得:

**推广定理**(Greene,Katona Kleitman[1976])　$H$ 是 $n$ 阶的简单超图,如果 $H$ 是交簇,则

(1) $\sum\limits_{\substack{E\in H\\ |E|\leqslant n/2}} \binom{n}{|E|-1}^{-1} + \sum\limits_{\substack{E\in H\\ |E|>n/2}} \binom{n}{|E|}^{-1} \leqslant 1$

(2) $m(H) \leqslant \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$

此外,当 $H = K_n^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ 时,(2) 中等号成立。

注　由定理 5 可得

$$\Delta_0(K_n^r) = \begin{cases} \binom{n-1}{r-1} & 若\ r \leqslant \frac{n}{2} \\ \binom{n}{r} & 若\ r > \frac{n}{2} \end{cases}$$

更确切地说,$r$- 一致完全超图 $K_n^r$ 的最大交簇是:当 $r < \frac{n}{2}$ 时为星 $K_n^r(x)$;当 $r = \frac{n}{2}$ 时为最大交簇;当 $r > \frac{n}{2}$ 时为 $K_n^r$ 的整个边集合。

·当 $r < \frac{n}{2}$ 时,定理 5 的证明蕴含着 $K_n^r$ 的最大交簇是星。

·当 $r = \frac{n}{2}$ 时,令 $H_0$ 是 $K_{2r}^r$ 的一个最大交簇,若 $E \in H_0$,则 $X - E \notin H_0$。若 $E \notin H_0$,则由于 $H_0$ 的极大性,$H_0$ 中存在一条与 $E$ 不相交的边 $E_j$,这蕴含着 $X - E = E_j \in H_0$,故

$$|H_0| = \frac{1}{2}m(K_{2r}^r)$$

因此所有极大交簇有相同的基数。

**定理 6** (Bollobás[1965]) 设 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m, F_1, F_2, \cdots, F_m)$ 是有 $n$ 个顶点 $2m$ 条边的超图,且满足 $E_i \cap F_j = \emptyset$ 当且仅当 $i = j$,则

$$(1)\ \sum_{j=1}^{m}\binom{|E_j| + |F_j|}{|E_j|}^{-1} \leqslant 1$$

此外,如果整数 $r, s$ 满足 $r + s = n$,且有

$$(E_1, E_2, \cdots, E_m) = K_n^r, \quad (F_1, F_2, \cdots, F_m) = K_n^s$$

则(1)式等号成立。

(*) **证** 这里用 Katona 的思路证明这结果。设 $X$ 是 $H$ 的顶点集,记

$$Y = \{(S_j, T_j) \mid (S_j, T_j) \text{是一个有序对}; S_j, T_j \subset X; S_j, T_j \neq \emptyset; S_j \cap T_j = \emptyset\}$$

以 $Y$ 为顶点集构造图 $G$:两顶点 $(S_i, T_j)$ 和 $(S_k, T_k)$ 相邻,当且仅当 $S_j \cap T_k = \emptyset$ 或 $S_k \cap T_j = \emptyset$。令 $\pi$ 是 $X$ 上的一个置换,$S \subset X$,用 $\bar{S}$ 表示 $\sigma = (\pi(1), \pi(2), \cdots, \pi(n))$ 中包含 $S$ 的最小区间,并令

$$Y(\pi) = \{(S, T) \mid (S, T) \in Y, \bar{S} \cap \bar{T} = \emptyset, \text{且在}\ \sigma\ \text{中}\ \bar{S}\ \text{前于}\ \bar{T}\}$$

如果 $Y(\pi)$ 中的两顶点 $(S_j, T_j)$ 与 $(S_k, T_k)$ 不相邻,则 $\bar{S}_j \cap \bar{T}_j = \emptyset, \bar{S}_k \cap \bar{T}_k = \emptyset, \bar{S}_j \cap \bar{T}_k \neq \emptyset, \bar{S}_k \cap \bar{T}_j \neq \emptyset$,矛盾,因此 $Y(\pi)$ 是 $G$ 的一个团。

在 $Y$ 上的图 $G$ 中,我们考虑 $p$ 个团 $C_1, C_2, \cdots, C_p$ 和独立集 $S \subset Y$,对 $\{(y, C_i) \mid y \in C_i, \text{且}\ y \in S\}$,用两种不同的方法进行计数:

$$\sum_{y \in S} |\{i \mid y \in C_i\}| = \sum_{i=1}^{p} |C_i \cap S| \leqslant p$$

由于 $\{(E_j, F_j) \mid j = 1, 2, \cdots, m\}$ 是 $G$ 的独立集,于是有

$$(2)\ \sum_{j=1}^{m} |\{\pi \mid (E_j, F_j) \in Y(\pi)\}| \leqslant n!$$

此外,对 $X$ 中两个不相交集合 $E, F$,有

$$|\{\pi \mid (E, F) \in Y(\pi)\}| = \binom{n}{|E \cup F|}(n - |E \cup F|)!|E|!|F|!$$
$$= n!\binom{|E| + |F|}{|E|}^{-1}$$

由上式及(2)式,得(1)式成立。

## 4 边着色性质和Chvátal的猜测

设$H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$是一个超图，用$k$种不同的颜色对$H$的边着色。若任意两条相邻的边都着不同的颜色，则这种着色称为正常的$k$-边着色。对$H$进行正常边着色所需最少的颜色数称为$H$的**边色数**，记为$q(H)$。$q(H)$是图的边色数的推广。

若$\Delta_0(H)=k$，则在$k$交簇中至少要用$k$种不同的颜色对这些边着色，因此

$$q(H)\geqslant\Delta_0(H)\geqslant\Delta(H)$$

若$H$满足$q(H)=\Delta(H)$，就说$H$具有**边着色性质**，即$H$可用$\Delta(H)$种颜色进行正常边着色。

**例1** 设$X$是一个会议代表的集合，这些代表每天参加某些会议，第$j$次会议的代表构成$X$的一个子集$E_j$。假设每位代表参加其中的$k$次会议，则当且仅当超图$H=(E_1,E_2,\cdots)$有边着色性质（每一种颜色的边可安排为对应一天的会议），才能在$k$天中安排完这些会议。

**例2** **二部图**。设$H$为二部多重图，其顶点集$X$分划为$(X_1,X_2)$，使得$H$中每条边$E$均有$|E\cap X_1|=1$，$|E\cap X_2|=1$。由著名的König定理知，$H$具有边着色性质。

**例3** **图**。设$G$是一个简单图，用$\hat{G}$表示在$G$中每个顶点加一个环所得到的多重图。由Vizing定理$q(G)\leqslant\Delta(G)+1=\Delta(\hat{G})$，可得$\hat{G}$的正常$\Delta(\hat{G})$-边着色，所以$\hat{G}$具有边着色性质。

**例4** **阶为$r$的倍数的$r$-完全超图**。所有$2p$阶完全图$K_{2p}$都有边着色性质，这是由Lucas[1892]所解决的一个古老定理。这个问题表述如下：某校有$2p$个女生，每天两人一组出去散步，问是否存在一种散步的配对方案，使得在$2p-1$天中，每个女生恰好与所有的其他女生一起散步一次？每一次这样的散步对应完全图$K_{2p}$的一些同色边集合。把顶点$1,2,\cdots,n-1=2p-1$按图3围成一个圈，$O$为圆心，第一种颜色的边由图中粗边组成，其余颜色的边由上述这些边绕中心$O$旋转产生。1936年在柏林Schur的学生R. Peltesohn提交的学位论文中证明了：某个学校有$3p$个女生，假如每天3个一组去散步，使得在$\binom{3p-1}{2}$天中任意3个女生恰好在一起散步一次，也就是完全3-一致超图$K_{3p}^3$具有边着色的性质。

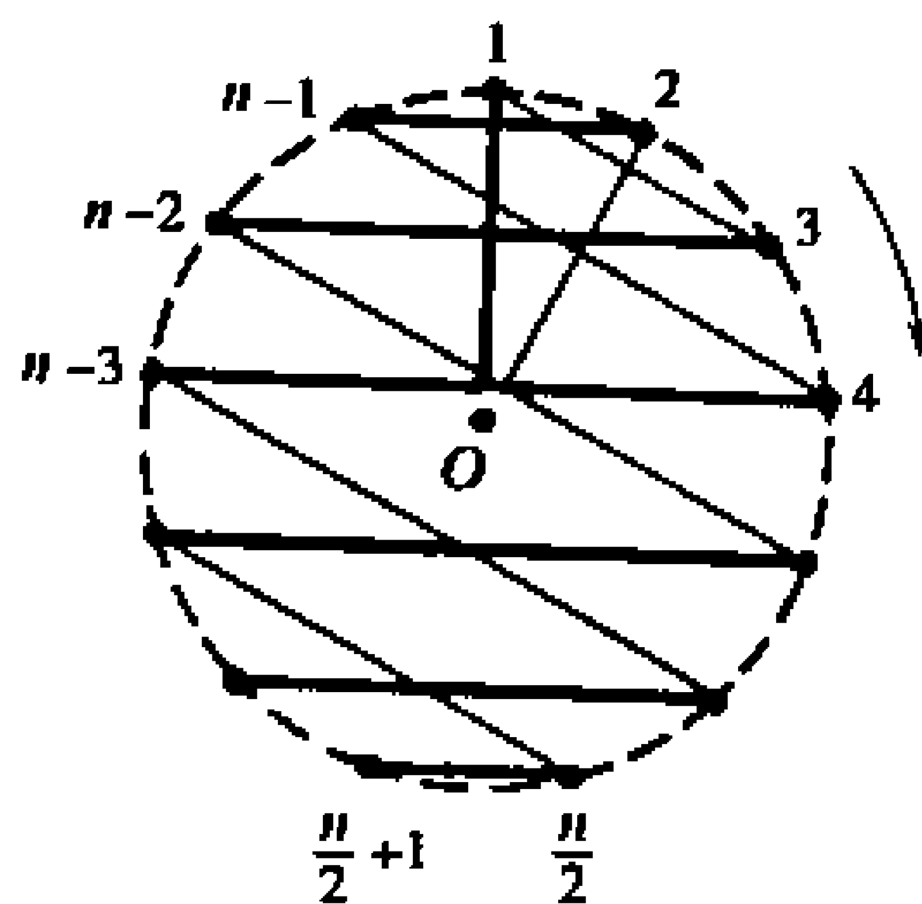


图3

对$p=3$，上述结果在40年前就由Walecki所发现。他得到9个女生$P,Q,a$，

$b,c,d,e,f,g$ 28 天的散步方案，并用图 4 中的 7 张表给出这个安排。最后，在 1975 年，Baranyai 用简明的方法最终证明了 $K_n^r$ 具有边着色性质，当且仅当 $r|n$（证明见第 4 章，§5）。

$$\begin{vmatrix} P & a & b \\ c & d & Q \\ e & f & g \end{vmatrix} \to \begin{cases} P\ a\ b,\ c\ d\ Q,\ e\ f\ g \\ P\ c\ e,\ a\ d\ f,\ b\ Q\ g \\ P\ d\ g,\ c\ f\ b,\ e\ a\ Q \\ b\ d\ e,\ Q\ f\ P,\ g\ a\ c \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} P & a & c \\ d & e & Q \\ f & g & a \end{vmatrix};\begin{vmatrix} P & c & d \\ e & f & Q \\ g & a & b \end{vmatrix};\begin{vmatrix} P & d & e \\ f & g & Q \\ a & b & c \end{vmatrix};\begin{vmatrix} P & e & f \\ g & a & Q \\ b & c & d \end{vmatrix};\begin{vmatrix} P & f & g \\ a & b & Q \\ c & d & e \end{vmatrix};\begin{vmatrix} P & g & a \\ b & c & Q \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

**图 4　确定 $K_9^3$ 边着色的 7 张表**

**例 5**　区间超图是一个超图，其顶点分布在一条线上，其边是这条线上某区间上的点集。易知区间超图具有边着色性质。上述结果是第 5 章中给予证明的更一般的定理的特殊情况。

令 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是 $X$ 上一个简单超图，$H$ 的**遗传闭包** $\hat{H}$ 定义为

$$\hat{H}=(F\,|\,\emptyset\neq F\subset X,\text{且存在 } E_i\in H,\text{使 } F\subset E_i)$$

的超图。

$X$ 上的一个非空子集簇 $(F_j\,|\,j\in J)$，若它满足

$$\emptyset\neq F\subset F_j\Rightarrow \text{存在 } k \text{ 使 } F=F_k$$

则称它具有**遗传性质**。显然，此时它可看作简单超图的遗传闭包。

并非所有的遗传超图具有边着色性质（例如，$\hat{K}_7^3,\hat{K}_9^4,\hat{K}_{10}^4$）。然而在 1974 年，Chvátal 给出一个重要猜测：

**Chvátal 的猜测**：每一个遗传超图 $\hat{H}$ 满足 $\Delta_0(\hat{H})=\Delta(\hat{H})$。

换句话说，在每个遗传超图中，最大的交簇中总存在一个是星。下面考虑这个猜测的几种情况。

**定理 7**（Berge [1976]）　设 $H$ 是星，则 $\hat{H}$ 有边着色性质。

**证**　令 $H$ 是关于 $X$ 的一个简单超图，所有的边均含顶点 $x_0$。假设对边数少于 $m(\hat{H})$ 的这类超图，定理 7 的结论正确。令 $A$ 是 $X$ 中形如 $A=E\cup F,\ E,F\in\hat{H}$ 的最大子集，则由 $A$ 的最大性，有 $x_0\in A$。记

$$\mathscr{A}=\{E\,|\,E\in\hat{H},\text{存在 } F\in\hat{H},\text{使 } E\cup F=A,E\cap F=\emptyset\}^{①}$$

① 原文中无 $E\cap F=\emptyset$ 这条件。

1. 显然,$\mathscr{B}$由 $x_0 \in E_\lambda \in \mathscr{B}$和形为 $A - E_\lambda$ 的边所组成。因此,只需对 $E_\lambda \in \mathscr{B}$ 和 $A - E_\lambda$ 着相同的颜色,就可得$\mathscr{B}$的 $d_{\mathscr{B}}(x_0)$ 色正常着色。故当$\hat{H} = \mathscr{B}$时,$\hat{H}$ 的边色数等于 $x_0$ 在 $\mathscr{B}$ 中的度数,于是定理成立。

2. 设 $\hat{H} \neq \mathscr{B}$,下面证明 $\hat{H} - \mathscr{B}$ 是遗传超图。

令 $E \in \hat{H} - \mathscr{B}, E' \subset E$。由于 $E' \in \hat{H}$,故只需证明 $E' \notin \mathscr{B}$。若 $E' \in \mathscr{B}$,则存在 $F' \in \hat{H}$,使 $E' \cup F' = A$。由 $A$ 的最大性,有 $E \cup F'' = A$,这里 $F'' \subset F'$,且 $F'' \in \hat{H}$。因此 $E \in \mathscr{B}$,矛盾。

3. $\hat{H} - \mathscr{B}$ 的极大边含 $x_0$。

否则,存在 $\hat{H} - \mathscr{B}$ 中的一条极大边 $E, x_0 \notin E$。由于 $H$ 是星,$E \cup \{x_0\} = E_0 \in \hat{H}$。由 $E$ 的极大性知,$E_0 \notin \hat{H} - \mathscr{B}$。于是 $E_0 \in \mathscr{B}$,且存在 $F_0 \in H, E_0 \cup F_0 = A$。故 $E \cup (F_0 \cup \{x_0\}) = A$ 及 $E \in \mathscr{B}$,矛盾。

4. 由归纳假设,$\hat{H} - \mathscr{B}$的边可以用 $d_{\hat{H}-\mathscr{B}}(x_0)$ 种颜色进行正常着色,利用(1)中结果,有

$$\Delta(\hat{H}) \leqslant q(\hat{H}) \leqslant d_{\hat{H}-\mathscr{B}}(x_0) + d_{\mathscr{B}}(x_0) = d_{\hat{H}}(x_0) \leqslant \Delta(\hat{H})$$

故上述等号成立。这就证明了 $x_0$ 是 $\hat{H}$ 中达到度为最大的一个顶点及 $q(\hat{H}) = \Delta(\hat{H})$。

$K_n^r$ 的遗传闭包的边着色性质与运筹学中著名的切段问题有关。两者的相关性在 1961 年由 Gilmore 和 Gomory 所解决。这个著名的切段问题即为:人们希望从长为 $n$ 的杆上切取 $k_1$ 根长度为 1 的柱,$k_2$ 根长度为 2 的柱,…,$k_r$ 根长度为 $r$ 的柱,且总杆数最少。

**定理 8** (Baranyai) 设 $r \leqslant n$ 为整数,则 $\hat{K}_n^r$ 具有边着色性质,当且仅当关于 $k_i = \binom{n}{i}$ $(i = 1,2,\cdots,r)$ 的无废料的切段问题有解,即存在非负整数$(x_{ij})$满足下列方程组:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{r} i x_{ij} = n & (j = 1,2\cdots) \\ \sum_{j} x_{ij} = \binom{n}{i} & (i = 1,2,\cdots,r) \end{cases}$$

其中,$x_{ij}$ 是 $i$ 元子集着 $j$ 色的数目。

必要性是显然的。对于充分性,将在后面给予证明(第 4 章,§5 中 Baranyai 的定理的推论)。

正如 $r$- 一致完全超图 $K_n^r$ 是完全图的推广一样,这里将完全二部图推广到 $r$- 部完全超图 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}^r$,其定义是:顶点集 $X$ 为 $X^1 \cup X^2 \cup \cdots \cup X^r$,其中 $X^1, X^2, \cdots,$

$X^r$ 两两不交且 $|X^i| = n_i$ $(i = 1,2,\cdots,r)$;边集为所有形如 $\{x^1,x^2,\cdots,x^r\}$ 的集合,其中 $x^i \in X^i$ $(i = 1,2,\cdots,r)$。

**定理 9** (Berge, Johnson [1977])　$r$- 部完全超图 $K^r_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$ $(r \geqslant 2)$ 和它的遗传闭包均具有边着色性质。

**证**　1. 令 $H = K^r_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$ $(1 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_r, r \geqslant 2)$。下面证明 $H$ 的边有 $\Delta(H) = n_2 n_3 \cdots n_r$ 色正常着色。将 $X^k$ 中的顶点记为 $x^k_1 = 0, x^k_2 = 1, \cdots, x^k_{n_k} = n_k - 1$。用 $[p]_k$ 表示小于或等于 $k-1$ 的整数,它关于模 $k$ 与 $p$ 同余。令 $H$ 的每条边 $\bar{x} = \{x^1,x^2,\cdots,x^r\}$ 对应一个 $(r-1)$ 维矢量

$$\xi(\bar{x}) = \left([x^2 + x^1]_{n_2}, [x^3 + x^1]_{n_3}, \cdots, [x^r + x^1]_{n_r}\right)$$

如果两条不同的边 $\bar{x} = \{x^1,x^2,\cdots,x^r\}$ 和 $\bar{y} = \{y^1,y^2,\cdots,y^r\}$ 相交,则下列两种情况之一必成立:

(i) $x^1 = y^1$。则存在 $i \geqslant 2$,使 $x^i \neq y^i$,所以有

$$[x^i + x^1]_{n_i} \neq [y^i + y^1]_{n_i}$$

因此

$$\xi(\bar{x}) \neq \xi(\bar{y})$$

(ii) $x^1 \neq y^1$。则存在 $i \geqslant 2$,使 $x^i = y^i$,所以有

$$[x^i + x^1]_{n_i} \neq [y^i + y^1]_{n_i}$$

故

$$\xi(\bar{x}) \neq \xi(\bar{y})$$

由上述可知,映射 $\bar{x} \to \xi(\bar{x})$ 是 $H$ 的一个正常边着色,其中不同的颜色数至多是

$$n_2 n_3 \cdots n_r = \Delta\left(K^r_{n_1,n_2,\cdots,n_r}\right)$$

2. 下面证明 $\hat{H}$ 的边能 $\Delta(\hat{H})$ 色正常着色。在 $H$ 中增加 $r$ 个顶点 $a^1,a^2,\cdots,a^r$,令 $Y^i = X^i \cup \{a^i\}$。考虑顶点分划为 $Y^i$, $|Y^i| = n_i + 1$ 的超图 $H' = K^r_{n_1+1,n_2+1,\cdots,n_r+1}$。

对 $\hat{H}$ 中每条边 $E$,存在 $H'$ 的一条边 $F = E \cup \{a^i \mid E \cap X^i = \varnothing\}$ 与之对应。因此 $\hat{H}$ 和 $H' - E_0$①的边之间存在一一对应关系。这里 $E_0 = \{a^1,a^2,\cdots,a^r\}$。由 1. 知,$r$- 部完全超图具有边着色性质。故能对 $H'$ 的边用 $\Delta(H') = (n_2+1)(n_3+1)\cdots(n_r+1)$ 种颜色正常着色。将 $\hat{H}$ 中边 $E$ 着与之相对应的 $H'$ 中的边 $F$ 的颜色。显然,$\hat{H}$ 中两条相交的边有不同的颜色,因此有

$$q(\hat{H}) \leqslant q(H') = \Delta(H') = \Delta(\hat{H}) \leqslant q(\hat{H})$$

---

① 原文是 $H'$。

于是有 $q(\hat{H}) = \Delta(\hat{H})$。所以 $\hat{H}$ 具有边着色性质。

下面一些超图 $H$ 具有性质 $\Delta_0(\hat{H}) = \Delta(\hat{H})$：

1. $H$ 是星(Schönheim [1973])。此时，定理 7 证明了 $\hat{H}$ 有更强的性质——边着色性质。

2. $H$ 是 2- 一致超图(Vizing)。

3. $H$ 是 3- 一致超图(Sterboul [1974])。此时还可证明 $\hat{H}$ 的极大交簇具有下面的结构：

- $\hat{H}(a)$(星)；
- $\{ab, ac, bc, abc\}$；
- $\{ab, ac, ad, abc, abd, acd, bcd\}$；
- $\{abx_1, abx_2, \cdots, abx_p, acx_1, \cdots, acx_p, bcx_1, \cdots, bcx_p, ab, ac, bc, abc\}$。

4. $H$ 是线性的。

如果 $H$ 是一致的，见 Sterboul [1974]；对一般的 $H$，见 Stein [1983]。

5. $H$ 的最大度 $\Delta(H) = 2$ (Stein, Schönheim [1978], Wang, Wang [1983])。

6. $H$ 是 $r$- 部完全超图。此时，定理 9 证明了 $\hat{H}$ 有更强的结论——边着色性质。

7. $H$ 是 $r$- 一致完全超图 $K_n^r$，且 $r \leqslant \frac{n}{2}$(见定理 5)。

例 3 支持如下猜测：

**猜测**　如果 $H$ 是线性的，则 $\hat{H}$ 具有边着色性质。

如果 $H$ 是一个图，这个猜测成立(Vizing)；如果 $H$ 是 7 个顶点 1,2,…,7 的射影平面，能用 $\Delta(\hat{H}) = 10$ 种颜色对 $\hat{H}$ 的边着色如下：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 123,45,6,7 | 着 1 色； | 345,12,67 | 着 6 色； |
| 147,56,23 | 着 2 色； | 367,14,25 | 着 7 色； |
| 156,34,27 | 着 3 色； | 17,36,24,5 | 着 8 色； |
| 246,37,15 | 着 4 色； | 16,35,47,2 | 着 9 色； |
| 257,13,46 | 着 5 色； | 57,26,1,3,4 | 着 10 色。 |

## 5　Helly 性质

$H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 是一个简单超图。如果 $H$ 的每一个交簇均是星，就称 $H$ 具有 **Helly 性质**，即对 $J \subset \{1, 2, \cdots, m\}$，

$$E_j \cap E_k \neq \emptyset \qquad (j, k \in J)$$

蕴含着

$$\bigcap_{j \in J} E_j \neq \emptyset$$

因此一个图具有 Helly 性质的充要条件是图不含三角形，因而具有 Helly 性质的超图是不含三角形的图的一种推广。

**例 1** $H$ 是区间超图。一个 Helly 的定理证明了 $H$ 具有 Helly 性质。

**例 2** 设$(X,\leqslant)$是格，即$(X,\leqslant)$是一个有序集，使得每一对$(a,b)$，存在最小上界 $a\vee b$ 和最大下界$a\wedge b$。令 $H$ 是如下形式的区间簇：

$$E(a,b)=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

则可以证明 $H$ 具有 Helly 性质。如果 $X$ 是自然数集，以算术级数作为 $H$ 的边，这时 Helly 性质就是著名的"中国剩余定理"。

称超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是 **$k$-Helly** 的，如果对每个集 $J\subset\{1,2,\cdots,m\}$，下面两个条件等价：

$(D_k)$ $I\subset J,|I|\leqslant k$，就有 $\bigcap_{i\in I}E_i\neq\varnothing$

$(D)$ $\bigcap_{j\in J}E_j\neq\varnothing$

显然，若 $J$ 满足$(D)$，则也满足$(D_k)$；反过来若 $H$ 不是$k$-Helly 的，则存在集合 $J$ 满足$(D_k)$但不满足$(D)$。

显然，一个超图是 2-Helly 的当且仅当 $H$ 具有 Helly 性质。注意到如果超图 $H$ 是$k$-Helly 的，则有$(D_{k+1})\Rightarrow(D_k)\Rightarrow(D)$。因此，超图是$(k+1)$-Helly 的，也是$k$-Helly 的。

**例** 设 $H$ 是顶点为$\mathbf{R}^d$ 中的点的超图，边为含在一凸集中的点的全体。当 $d=1$ 时，对应的超图为区间超图。一个 Helly 的定理证明了上述定义在 $\mathbf{R}^d$ 中的超图是$(d+1)$-Helly 的。

**定理 10** (Berge, Duchet [1975]) 超图 $H$ 是$k$-Helly 的充要条件：是对每一个顶点子集 $A$，$|A|=k+1$，有

$$\bigcap_{|E_j\cap A|\geqslant k}E_j\neq\varnothing$$

**证** 1. 设 $H$ 是 $X$ 上的$k$-Helly 超图，$A\subset X$，且$|A|=k+1$。令

$$J=\{j\mid |E_j\cap A|\geqslant k\}$$

下面证明 $\bigcap_{j\in J}E_j\neq\varnothing$。

**情况 1** $|J|\leqslant k$。则有 $\bigcap_{j\in J}E_j\neq\varnothing$，否则以 $A$ 中的顶点和$(E_j\mid j\in J)$中的边作为顶点集，对任意的 $x\in A$ 和$j\in J$，$x$ 与$E_j$ 相邻当且仅当$x\in E_j$ 所构成的二部图 $G$ 满足：

$$|J|k\leqslant\sum_{j\in J}d_G(j)=m(G)\leqslant(|J|-1)|A|=(|J|-1)(k+1)$$

它蕴含了$|J|\geqslant k+1$，矛盾。

**情况 2** $|J|\geqslant k+1$。此时，对于集合 $I\subset J$，$|I|\leqslant k$，由情况 1，有 $\bigcap_{i\in I}E_i\neq\varnothing$。于是 $J$ 满足$(D_k)$进而满足$(D)$。所以

$$\bigcap_{j\in J}E_j \neq \varnothing$$

2. 设超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 满足对任意的 $A\subset X,|A|\geqslant k+1$,有

$$\bigcap_{|E_j\cap A|\geqslant k}E_j \neq \varnothing$$

下面证明 $H$ 是 $k$-Helly 的,即对每一个 $J\subset\{1,2,\cdots,m\}$,有 $(D_k)\Rightarrow(D)$。

对 $|J|$ 进行归纳。当 $|J|\leqslant k$ 时显然成立,故可假设 $|J|>k$。令 $j_1,j_2,\cdots,j_{k+1}$ 是 $J$ 中的不同元素,则条件 $(D_k)$ 蕴含:

$$(\forall I\subset J-\{j_\lambda\},|I|\leqslant k):\bigcap_{j\in I}E_j\neq\varnothing$$

根据归纳假设,有

$$\bigcap_{j\in J-\{j_\lambda\}}E_j\neq\varnothing$$

记 $a_\lambda$ 为这个交中的一个元素,则 $a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$ 是互不相同的,否则结论已成立。对于 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}\}$,有

$$|E_j\cap A|\geqslant k \qquad (j\in J)$$

故

$$\bigcap_{j\in J}E_j \neq \varnothing$$

**推论** 超图 $H$ 具有 Helly 性质的充要条件是:对于 $H$ 的任意三个顶点 $a_1,a_2,a_3$,至少包含其中两个顶点的边的全体的交是非空的。

**应用(树的子树簇)** 令 $G$ 是一棵树。考虑 $X$ 的如下子集 $E_i$ 的全体:$E_i$ 的诱导子图是 $G$ 的子树。应用前面的推论证明上述超图 $H$ 具有 Helly 性质。为此,考虑 $G$ 中三个顶点 $a,b,c$。用 $\mu[x,y]$ 表示 $G$ 中唯一连接 $x$ 和 $y$ 的路,易知三条路 $\mu[a,b]$,$\mu[b,c]$ 和 $\mu[c,a]$ 有一个公共顶点 $x_0$,否则 $G$ 将含圈。顶点 $x_0$ 就是 $H$ 中包含 $a,b,c$ 中至少两个顶点的边的公共顶点。所以 $H$ 具有 Helly 性质。

**定理 11** (Tuza [1984]) 设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是 $n$ 阶 $k$-Helly 的简单超图。如果 $\min\limits_j|E_j|\geqslant k+1$,则

$$\sum_{j=1}^{m}\binom{n-1}{|E_j|-1}^{-1}\leqslant 1$$

(*) **证** 1. 首先证明对每条边 $E_j$,$E_j$ 中含有一个顶点 $a_j$,使 $E_j-\{a_j\}$ 不含在其他任何不同于 $E_j$ 的边中。否则,存在一条边 $E_0=\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$,其中 $r\geqslant k+1$,使得对一切 $i=1,2,\cdots,r$,满足 $E_0-\{a_i\}\subset E_i$。由于 $H$ 是简单超图,故有 $E_0\cap E_i=E_0-\{a_i\}\ (i=1,2,\cdots,r)$。于是有

$$\bigcap_{j=0}^{r}E_j=\varnothing$$

但是,$E_0,E_1,\cdots,E_r$ 中的 $r-1$ 个集的交是非空的。由于 $r-1\geqslant k$ 和 $H$ 是 $k$-Helly 的,所以有

$$\bigcap_{j=0}^{r} E_j = \emptyset$$

矛盾。

2. 在 $H^*$ 中对每条边 $E_j$ 含一个顶点 $a_j$，使得

$$(E_j - \{a_i\}) \cap (X - E_i) \neq \emptyset \qquad (\forall i \neq j)$$

令

$$E'_j = E_j - \{a_j\}$$
$$F'_j = X - E_j$$

则有

$$E'_j \cap E_j = \emptyset$$
$$E'_j \cap F'_i \neq \emptyset \qquad (\forall i \neq j)$$

由定理 6 有

$$\sum_{j=1}^{m} \binom{|X - E_j| + |E_j| - 1}{|E_j| - 1}^{-1} \leqslant 1$$

定理成立。

**推论** (Bollobás, Duchet [1979]) 设 $H$ 是 $n$ 阶 $k$-Helly 的简单超图，满足 $\min_j |E_j| \geqslant k+1$ 和 $\max_j |E_j| = r \leqslant \frac{n}{2}$，则

$$m(H) \leqslant \binom{n-1}{r-1}$$

**证** 每条边 $E \in H$ 满足

$$\binom{n-1}{|E|-1} \leqslant \binom{n-1}{r-1}$$

因此

$$m(H)\binom{n-1}{r-1}^{-1} \leqslant \sum_{E \in H} \binom{n-1}{|E|-1}^{-1} \leqslant 1$$

故结论成立。

对具有 Helly 性质的超图，可以得到更进一步的结论：

**定理 12** (Bollobás, Duchet [1983]) 设 $H$ 是秩为 $r(3 \leqslant r \leqslant \frac{n}{2})$ 的 $n$ 阶简单超图，且具有 Helly 性质，则

$$m(H) \leqslant \binom{n-1}{r-1}$$

此外，上式等号成立当且仅当 $H$ 是 $K_n^r$ 的一个星。

**定理 13** (Bollobás, Duchet [1983]) 设 $H$ 是 $n \geqslant 5$ 阶简单超图，且具有 Helly 性质，则

$$m(H) \leqslant \binom{n-1}{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

此外，上式等号成立当且仅当下面条件之一成立：

( i ) $n = 2h$ 是偶数，且 $H$ 是 $K_n^h$ 的一个星；

( ii ) $n = 2h + 1 \geqslant 7$ 是奇数，且 $H$ 是 $K_n^{h+1}$ 的一个星或 $K_n^h$ 的一个星；

( iii ) $n = 5$ 且 $H$ 是 $K_5^3$ 的一个星，或者 $H$ 是二部完全图 $K_{2,3}$。

# 6　超图的截口和 Kruskal-Katona 定理

$H$ 是 $X$ 上秩为 $r$ 的简单超图，设 $k \leqslant r$ 是一个正整数。定义 $H$ 的 **$k$- 截口** $[H]_k$：它的顶点集合为 $X$，边集合为如下的 $F$ 全体：$F \subset X, |F| = k$，且满足 $F \subseteq E \in H$，或 $|F| < k$ 且 $F \in H$。

显然，$[H]_k$ 是 $X$ 上秩为 $k$ 的简单超图。

当 $k = 2, H$ 无环时，2- 截口 $[H]_2$ 是一个简单图，并可用如下方式来获得 $[H]_2$：$X$ 中两个顶点在 $[H]_2$ 中相邻当且仅当它们含在 $H$ 中的某一条边中。如果 $H$ 是含有 $m$ 条边的简单 $r$- 一致超图，能否获得 $[H]_{r-1}$ 的边数？

关于上述问题的最好下界分别独立地被 Kruskal [1963] 和 Katona [1968] 获得，其证明被 Daykin [1976] 简化。下面给出的进一步简化的证明由 Frankl [1984] 给出。为了证明，需要下面两条基本的引理。

**引理 1**　设 $m$ 和 $r$ 是正整数，则存在整数 $a_r, a_{r-1}, \cdots, a_s$，使得

(1) $m = \binom{a_r}{r} + \binom{a_{r-1}}{r-1} + \cdots + \binom{a_s}{s}$

(2) $a_r > a_{r-1} > \cdots > a_s \geqslant s \geqslant 1$

此外，由(1) 和(2) 定义的这些整数 $a_i$ 是唯一的。特别地，$a_r$ 是使

$$m - \binom{a_r}{r} \geqslant 0$$

成立的最大整数。

(*) **证**　对 $r$ 进行归纳。当 $r = 1$ 时，有 $1 = r \geqslant s \geqslant 1$，所以 $s = 1$ 和 $a_s = m$，因此(1) 式存在且唯一。现假设对 $r - 1$ 的(1) 式存在且唯一。令 $a_r$ 是使 $m - \binom{a_r}{r} \geqslant 0$ 的最大整数，则由归纳假设

$$m - \binom{a_r}{r} = \binom{a_{r-1}}{r-1} + \cdots + \binom{a_s}{s}$$

$$a_{r-1} > a_{r-2} > \cdots > a_s \geqslant s$$

我们可断言：$a_r > a_{r-1}$，否则有

$$m \geqslant \binom{a_r}{r} + \binom{a_{r-1}}{r-1} \geqslant \binom{a_r}{r} + \binom{a_r}{r-1} = \binom{a_r+1}{r}$$

这与 $a_r$ 的定义相矛盾。从而证明了(1)式的存在性。

为了证明唯一性，假设 $m$ 有两个不同的分解式：

$$m = \binom{a_r}{r} + \binom{a_{r-1}}{r-1} + \cdots + \binom{a_s}{s} = \binom{b_r}{r} + \binom{b_{r-1}}{r-1} + \cdots + \binom{b_{s'}}{s'}$$

显然

$$m \leqslant \binom{a_r}{r} + \binom{a_r-1}{r-1} + \cdots + \binom{a_r-r+1}{1} + \binom{a_r-r}{0}^{①} = \binom{a_r+1}{r}$$

若 $a_r < b_r$，则

$$m \leqslant \binom{a_r+1}{r} \leqslant \binom{b_r}{r} \leqslant m$$

这蕴含着 $m = \binom{a_r+1}{r}$，与 $a_r$ 的定义相矛盾。

因此 $a_r = b_r$。由归纳假设 $m - \binom{a_r}{r} = m - \binom{b_r}{r}$ 的分解式是唯一的，因此关于 $m$ 的分解式唯一。

**引理 2** (Frankl [1984]) 设 $H$ 是 $X$ 上的一个 $r$- 一致超图，$x_1 \in X$，则存在 $X$ 上的一个 $r$- 一致超图 $H'$，使得 $m(H') = m(H)$，$m([H']_{r-1}) \leqslant m([H]_{r-1})$，且

$$F \in [H' - H'(x_1)]_{r-1} \Rightarrow F \cup \{x_1\} \in H'$$

(*) **证** 对 $x \neq x_1$，令

$$\sigma_x E = \begin{cases} (E - \{x\}) \cup \{x_1\} & \text{若 } x \in E, x_1 \notin E \\ E & \text{其他} \end{cases}$$

记 $\sigma_x H = \{\sigma_x E \mid E \in H\}$。易见 $[\sigma_x H]_{r-1} \subset \sigma_x [H]_{r-1}$。对 $\sigma_x H$ 还可用 $\sigma_y$ 作同样的运算。若需要可进行多次，直到得到超图 $H'$ 满足 $m(H') = m(H)$，$m([H']_{r-1}) \leqslant m([H]_{r-1})$，并对一切 $x \neq x_1$，$\sigma_x H' = H'$ 为止。

**定理 14** (Kruskal, Katona) 设 $H$ 是一个 $r$- 一致超图，满足

$$m(H) = m = \binom{a_r}{r} + \binom{a_{r-1}}{r-1} + \cdots + \binom{a_s}{s}$$

$$a_r > a_{r-1} > \cdots > a_s \geqslant s \geqslant 1$$

则

---

① 原文误为 $m \leqslant \binom{a_r}{r} + \binom{a_r-1}{r-1} + \cdots + \binom{a_r-r+1}{r}$。

$$m([H]_{r-1}) \geqslant \binom{a_r}{r-1} + \binom{a_{r-1}}{r-2} + \cdots + \binom{a_s}{s-1}$$

(*) **证**　1. 假设 $H$ 满足

(1) $F \in [H - H(x_1)]_{r-1} \Rightarrow F \cup \{x_1\} \in H$

否则,用引理 2 中所定义的 $H'$ 来代替 $H$。设 $H_1 = (E - \{x_1\} \mid E \in H(x_1))$,则

(2) $m([H]_{r-1}) \geqslant m(H_1) + m([H_1]_{r-2})$

2. 当 $r = 1$ 或 $m = 1$ 时定理成立,下面对 $r$ 和 $m$ 进行归纳。

首先假设

(3) $m(H_1) \geqslant \binom{a_r - 1}{r-1} + \cdots + \binom{a_s - 1}{s-1}$

对超图 $H_1$ 应用归纳假设(如果(3)式是严格的,则下面不等式更成立),得到

$$m([H_1]_{r-2}) \geqslant \binom{a_r - 1}{r-2} + \binom{a_{r-1} - 1}{r-3} + \cdots + \binom{a_s - 1}{s-2}$$

于是由(2)式

$$\begin{aligned} m([H]_{r-1}) &\geqslant m(H_1) + m([H_1]_{r-2}) \\ &\geqslant \binom{a_r - 1}{r-1} + \cdots + \binom{a_s - 1}{s-1} + \binom{a_r - 1}{r-2} + \cdots + \binom{a_s - 1}{s-2} \\ &= \binom{a_r}{r-1} + \cdots + \binom{a_s}{s-1} \end{aligned}$$

从而得到定理的结论。

下面假设

(4) $m(H_1) < \binom{a_r - 1}{r-1} + \binom{a_{r-1} - 1}{r-2} + \cdots + \binom{a_s - 1}{s-1}$

于是有

$$\begin{aligned} m(H - H(x_1)) &= m(H) - m(H_1) \\ &> \binom{a_r}{r} + \cdots + \binom{a_s}{s} - \binom{a_r - 1}{r-1} - \cdots - \binom{a_s - 1}{s-1} \\ &= \binom{a_r - 1}{r} + \binom{a_{r-1} - 1}{r-1} + \cdots + \binom{a_s - 1}{s} \end{aligned}$$

由(1)式并对 $H - H(x_1)$ 关于 $m$ 应用归纳假设,有

$$\begin{aligned} m(H_1) &\geqslant m([H - H(x_1)]_{r-1}) \\ &> \binom{a_r - 1}{r-1} + \binom{a_{r-1} - 1}{r-2} + \cdots + \binom{a_s - 1}{s-1} \end{aligned}$$

这与(4)式相矛盾。

**推论**　设 $H$ 是一个 $r$- 一致超图,$k$ 是一个整数,$r > k \geqslant 2$。若 $a$ 是使 $m(H)$

$\geqslant \binom{a}{r}$成立的最大整数,则

$$m([H]_k) \geqslant \binom{a}{k}$$

**证** 设 $H_1$ 是 $H$ 的一个部分超图,满足 $m(H_1) = \binom{a}{r}$。由定理 14,有

$$m([H_1]_{r-1}) \geqslant \binom{a}{r-1}$$

设 $H_2$ 是$[H_1]_{r-1}$ 的一个部分超图,满足 $m(H_2) = \binom{a}{r-1}$。由定理 14,有

$$m([H_2]_{r-2}) \geqslant \binom{a}{r-2}$$

重复这一过程,最后必有 $m([H_{r-k}]_k) \geqslant \binom{a}{k}$。由于$[H]_k \supset [H_{r-k}]_k$,故有

$$m([H]_k) \geqslant \binom{a}{k}$$

# 7 保形超图

如果$[H]_2$ 的每一个极大团都对应 $H$ 的一条边,就称 $H$ 为**保形超图**。如果 $H$ 是简单超图,则 $H$ 是保形的充要条件是:$H$ 的边是$[H]_2$ 的极大团。

更一般地,考虑整数 $k \geqslant 2$。超图 $H$ 的每条边$A$ 满足性质:$[H]_k$ 含在$A$ 中的所有边构成一个 $k$- 完全一致超图。如果 $X$ 中每个具有此性质的极大子集$A$ 都是$H$ 的边,则称超图 $H$ 是**$k$- 保形的**。因此,超图 $H$ 是保形的充要条件是:$H$ 是2- 保形的。

**性质** 超图 $H$ 是$k$- 保形的充要条件是:对 $X$ 中每个子集$A$,下面两个条件等价:

$(C_k)$ 每个 $S \subset A, |S| \leqslant k$ 含在$H$ 的某一条边中;

$(C)$ 集合 $A$ 含在$H$ 的一条边中。

显然,$(C)$ 蕴含$(C_k)$。反过来由下面的引理即知。

**引理** 超图 $H$ 是$k$- 保形的当且仅当它的对偶是$k$-Helly 的。

**证** 在超图 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 中,集合 $A = \{x_j | j \in J\}$满足条件$(C_k)$当且仅当在对偶超图 $H^* = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 中,集合 $J$ 满足

$(D_k)$ $\forall I \subset J, |I| \leqslant k$,有 $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \varnothing$

类似地,集合 $A$ 满足条件$(C)$ 当且仅当对偶超图 $H^*$ 中集合 $J$ 满足

$(D)$ $\bigcap_{j \in J} X_j \neq \varnothing$

故$(C_k)$ 等价于$(C)$ 当且仅当$(D_k)$ 等价于$(D)$。

**定理 15** 简单超图 $H$ 是 $k$- 保形的当且仅当对 $H$ 的每个含有 $k+1$ 条边的部分超图 $H'$，集合 $\{x \mid x \in X, d_{H'}(x) \geqslant k\}$ 含在 $H$ 的一条边中。

**证** 由定理 10，对偶超图 $H^* = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 $k$-Helly 的充要条件是：对于集 $F = \{e_j \mid j \in J, |J| = k+1\}$，$\bigcap_{|X_i \cap F| \geqslant k} X_i \neq \varnothing$。另一方面，对每个 $H' = \{E_j \mid j \in J, |J| = k+1\}$，存在 $H$ 的一条边包含集合 $\{x \mid x \in X, d_{H'}(x) \geqslant k\}$。

**推论**（Gilmore 的定理） 超图 $H$ 是保形的充要条件是：对 $H$ 的任意三条边 $E_1, E_2, E_3$，总能找到 $H$ 的一条边 $E$ 使得

$$E \supset (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3)$$

在定理 15 中取 $k = 2$，即为本推论。

## 8 线图

给定 $X$ 上一个超图 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$，$H$ 的**线图**或**表示图** $L(H)$ 定义为：它的顶点为 $e_1, e_2, \cdots, e_m$，分别对应 $H$ 的边，两顶点 $e_i, e_j$ 在 $L(H)$ 中相邻当且仅当 $E_i \cap E_j \neq \varnothing$。

**例 1** Beineke [1968] 刻画了简单图 $G$ 的线图的特征：图是某个图 $G$ 的线图 $L(G)$ 当且仅当该图不包含图 5 所示 $G_1, G_2, \cdots, G_9$ 中的任一个图作为它的诱导子图。

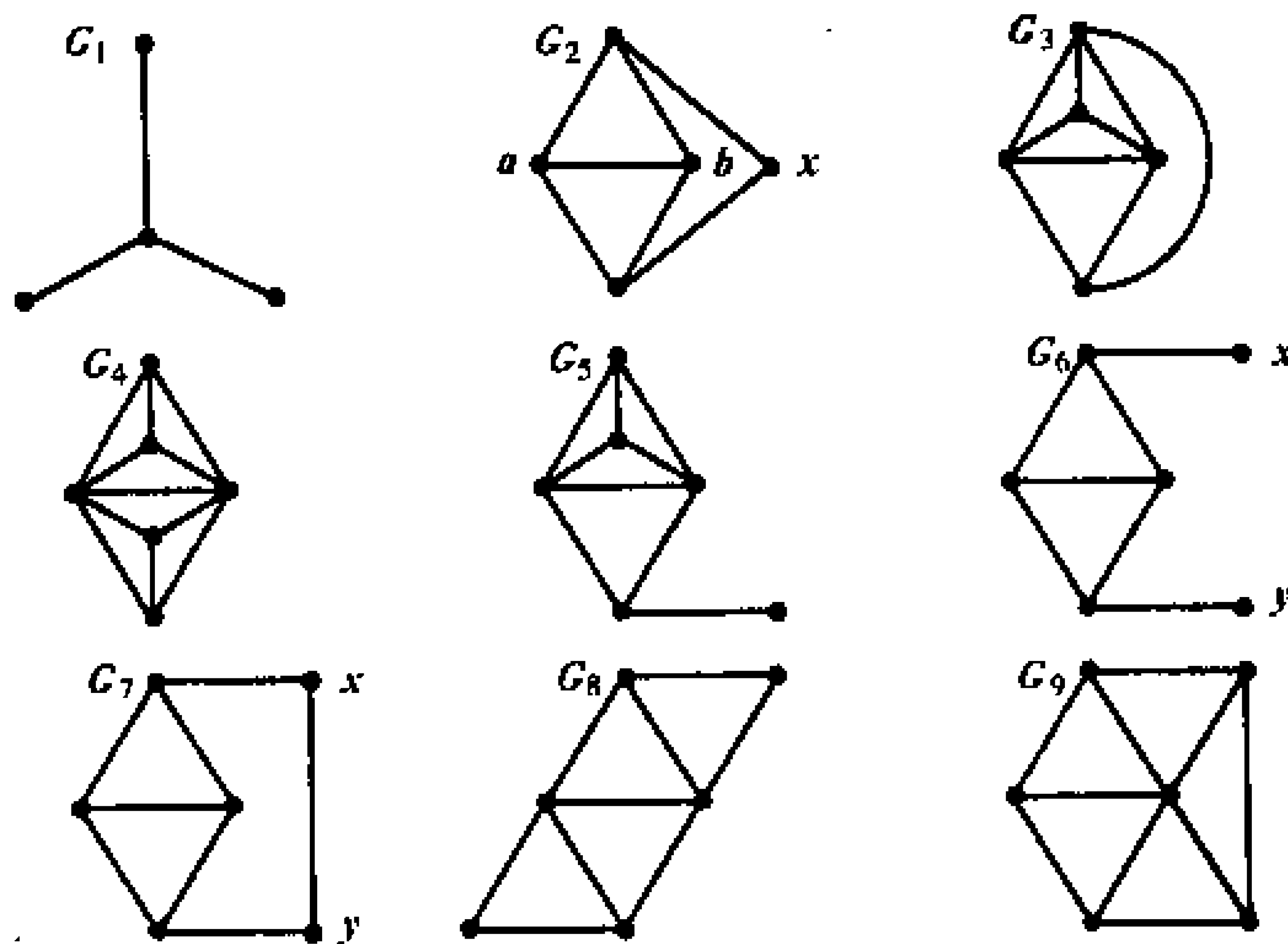



图 5 简单图的线图的 9 个禁用子图

**例 2** 多重图 $G$ 的线图的特征被 Bermond 和 Meyer[1973] 给出：图是某个图 $G$ 的线图 $L(G)$ 当且仅当该图不包含图 6 所示 $G'_1, G'_2, \cdots, G'_7$ 中的任何一个图作为它的诱导子图。

**例 3** 不含三角形多重图的线图的特征是：每个顶点至多含于两个极大团中。

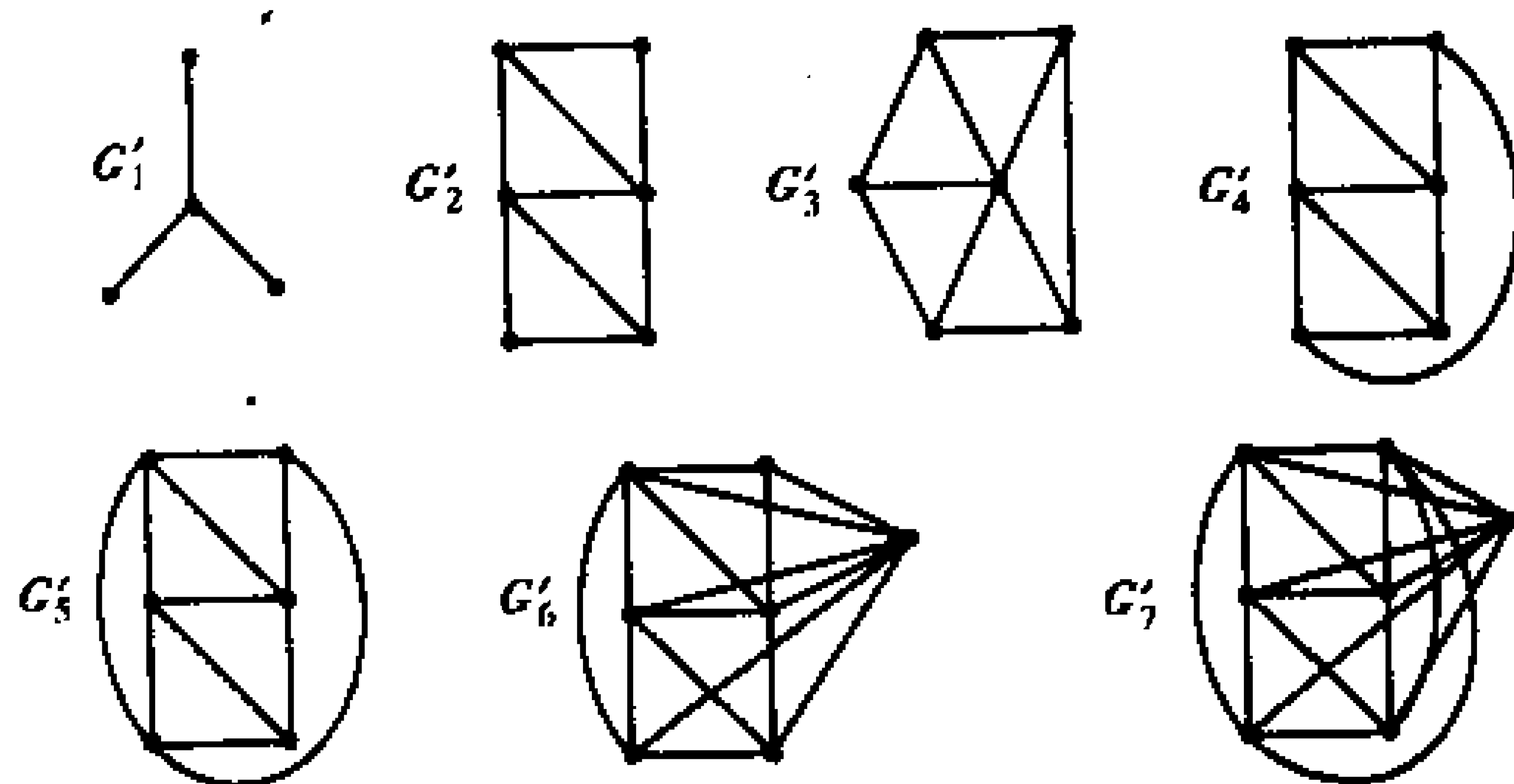



图 6 多重图的线图的 7 个禁用子图

**例 4** 二部多重图的线图的特征是：每个顶点至多含于两个极大团中，且每一个奇圈包含某个三角形中的两条边。

**例 5** 若 $H$ 是一条直线上的区间簇，Gilmore 和 Hoffman 给出 $L(H)$ 的特征（参见 Graphs，第 16 章，定理 12）：它是可比较图的三角剖分补图。这个概念有一个简单的解释：若 $m$ 位代表分别出席不同时期段的会议，一侦探查问每个与他相遇的人的情况，构成"相偶图"；若没有人说谎，则这个图表示一个区间簇。

至今还不知道在平面上一个凸集簇的线图的特征，但我们知道每个图可表示为 3 维空间中一个凸集簇（Wegner [1965]）。

**性质 1** 超图 $H$ 的线图是 $H^*$ 的 2- 截口 $[H^*]_2$。此外，下面两个性质相互等价：

（ⅰ）$H$ 具有 Helly 性质且 $G$ 是 $H$ 的线图；

（ⅱ）$H^*$ 的极大边是 $G$ 的极大团。

若 $H^*$ 有环，则 $[H^*]_2$ 也有环。当不考虑 $[H^*]_2$ 中有环的情况时，显然有：图 $[H^*]_2$ 同构于 $L(H)$。

对另一部分，如果 $H$ 具有 Helly 性质，则 $H^*$ 是保形的。因此，（ⅰ）蕴含着 $G = [H^*]_2$ 中的团对应 $H^*$ 的极大边。类似地，（ⅱ）蕴含着（ⅰ）。

注意到，若 $G = L(H)$ 且 $H$ 不具有 Helly 性质，则存在 $L(H)$ 的极大团在 $H^*$ 中无对应的边。例如，$H$ 是图 8 所示的超图 $H_2$，$L(H)$ 是图 8 所示的图 $G$，则 $G$ 的极大团不是 $H^*$ 的边。

**性质 2** 每个简单图①是线性超图的线图。

$G$ 是顶点集为 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的简单图，用 $X_i$ 表示 $G$ 中与 $x_i$ 关联的边集合，则线性超图 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的线图就是 $G$。

**性质 3** 图 $G$ 是 $r$- 一致超图的线图的充要条件是：$G$ 含一个具有下列性质的团簇 $\mathscr{C}$：

$(\pi_0)$ $\mathscr{C}$ 的每个团的基数至少是 2；

① 原文没有"简单图"这一条件。

($\pi_1$) $G$ 的每一条边至少含在 $\mathscr{C}$ 的一个团中;

($\pi_2$) $G$ 的每个顶点至多含于 $\mathscr{C}$ 的 $r$ 个团中;

($\pi_3$) $\mathscr{C}$ 中恰包含覆盖顶点 $x$ 的团使得其交是 $\{x\}$。

事实上,由($\pi_2$),在 $\mathscr{C}$ 中加若干个环可得到一个 $r$- 正则超图 $\mathscr{C}'$。令 $H$ 为 $\mathscr{C}'$ 的对偶超图。由($\pi_1$),有 $L(H) \simeq [H^*]_2 \simeq [\mathscr{C}]_2 \simeq G$。由($\pi_3$),超图 $H$ 没有重边,即 $H$ 是 $r$- 一致超图。

**性质 4** 图 $G$ 是线性 $r$- 一致超图的线图的充要条件是:$G$ 中存在一个满足条件($\pi_0$),($\pi_2$) 和($\pi_1'$) 的团簇 $\mathscr{C}$,其中

($\pi_1'$) $G$ 中的每条边恰好含在 $\mathscr{C}$ 中的一个团中。

由($\pi_2$),在 $\mathscr{C}$ 中加若干个环能得到一个 $r$- 正则超图 $\mathscr{C}'$。令 $H$ 表示 $\mathscr{C}'$ 的对偶超图。由($\pi_1'$),$L(H) = G$ 且超图 $\mathscr{C}$ 是线性的。因此由 §3 的性质 3,$\mathscr{C}'$ 的对偶 $H$ 是线性的。

自然地提出如下问题:$r \neq 2$ 时,是否有可能通过由禁用子图组成的有限集簇来刻画线图 $L(H)$ 的特征。事实上,先是 Nickel,其后有 Gardner,接着有 Bermond, Heydemann, Sotteau [1977] 先后给出禁用子图无限簇用来刻画 3- 一致超图的线图的特性。

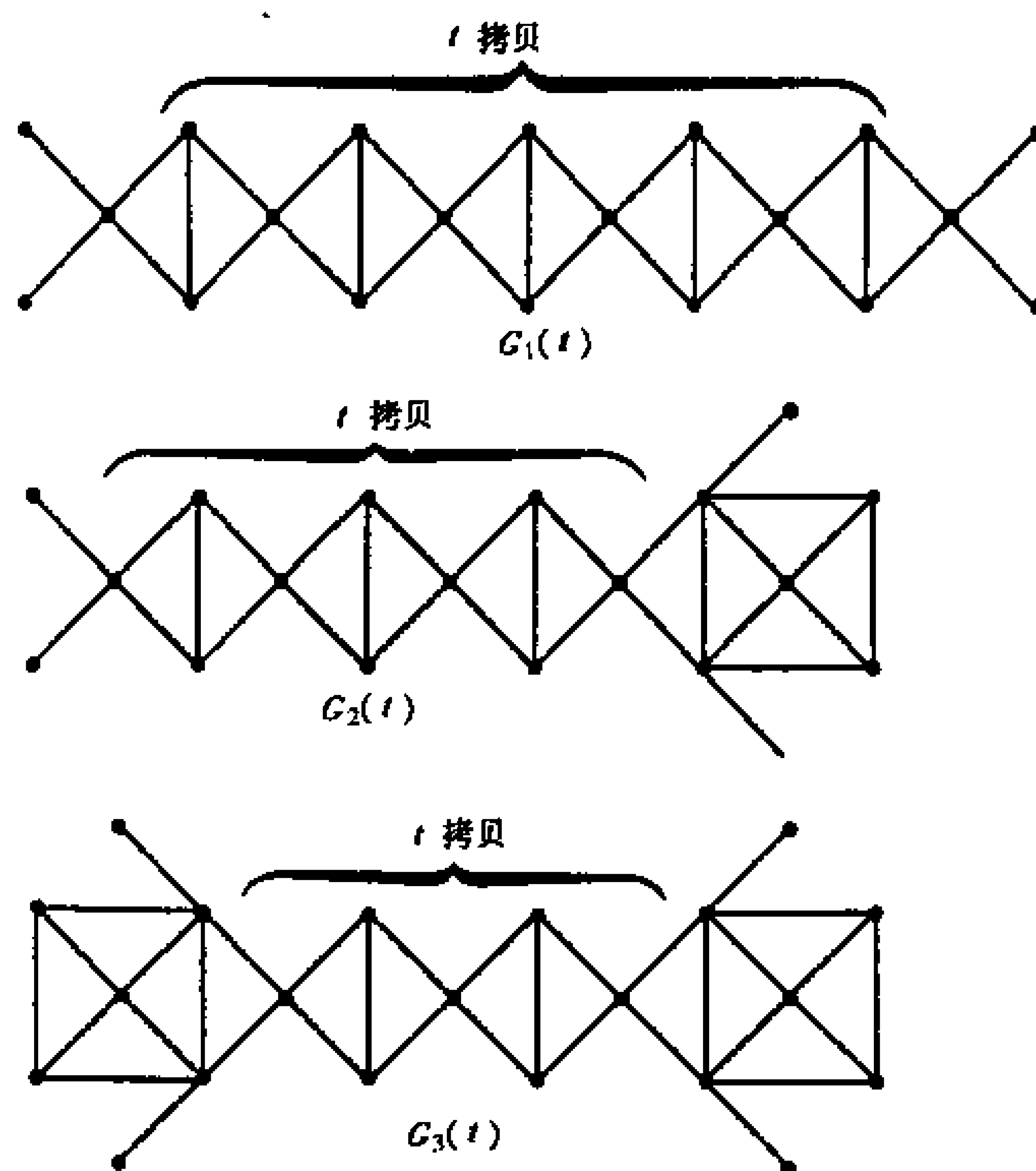



图 7

图7中的图 $G_1(t)$,$G_2(t)$,$G_3(t)$ 组成了3-一致线性超图的线图的极小禁用子图无限簇。

然而,仍有下面的定理16:

**定理16** (Nailk, Rao, Shrikhande, Singhi [1982]) 存在图的有限簇 $\mathscr{F}_3$,使得每个最小度至少是69的图 $G$ 是3-一致线性超图的线图的充要条件是:$G$ 不含 $\mathscr{F}_3$ 中的诱导子图。

更一般地,他们证明存在一个三次多项式 $f(k)$,对每个 $k$ 存在禁用子图的有限簇 $\mathscr{F}_k$,使得对每个最小度至少是 $f(k)$ 的图 $G$ 是一个 $k$-一致线性超图的线图的充要条件是:$G$ 中不含 $\mathscr{F}_k$ 中的诱导子图。

作为例子,验证前面性质所提到的图8中 $G$,对图8所示的超图 $H_1$,$H_2$,$H_3$ 的线图都是 $G$。

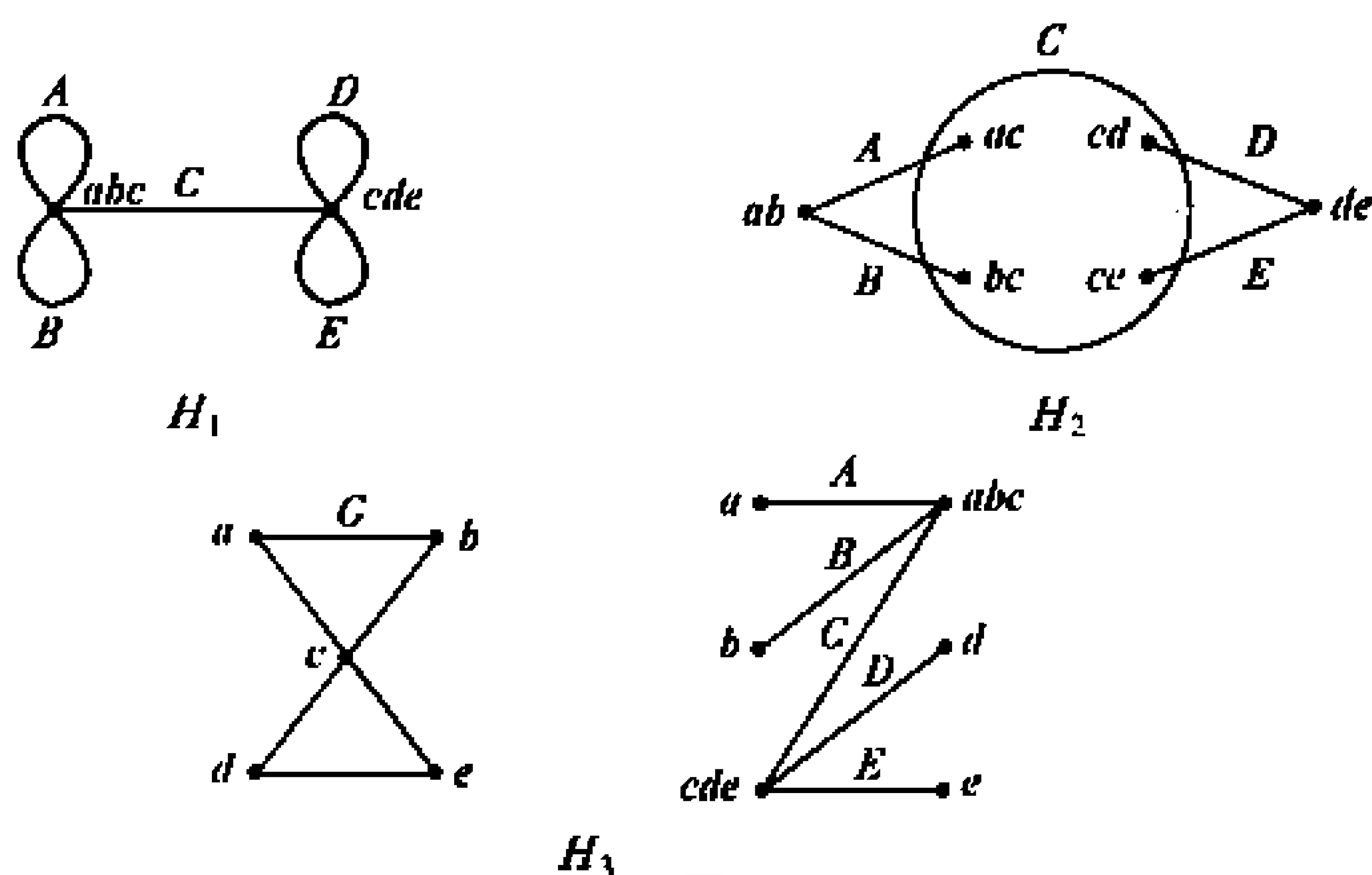



**图8**

用 $\Omega(G)$ 表示使 $L(H)=G$ 成立的这些超图 $H$ 的最小阶数。例如,在图8中的 $G$,由于 $G=L(H_1)$,故有 $\Omega(G)=2$。

利用下面的结果,确定 $\Omega(G)$ 可由相应的图的色数来确定。

**引理**　设 $G$ 是顶点集合为 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,且没有孤立点的图。令图 $\bar{G}$ 表示以 $G$ 的边作为 $\bar{G}$ 的顶点,$G$ 中两条边 $[a,b]$ 和 $[x,y]$ 对应的两个顶点在 $\bar{G}$ 中相邻当且仅当 $\{a,b,x,y\}$ 在 $G$ 中不是团,则 $\Omega(G)$ 等于 $\bar{G}$ 的色数。

**证**　1. 下面构造一个与 $\bar{G}$ 的 $q$-色分类 $(\bar{S}_1,\bar{S}_2,\cdots,\bar{S}_q)$ 相对应的 $q$ 阶超图 $H=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,使得 $G=L(H)$。

事实上,$\bar{G}$ 中着 $i$ 色的顶点集 $\bar{S}_i$ 是独立集。如果 $[a,b]$ 是 $G$ 的一条边且属于 $\bar{S}_i$,则对 $\bar{S}_i$ 中任一元素 $[x,y]$,在 $G$ 中 $a$ 与 $x$ 和 $y$ 相邻。因此,$G$ 中属于 $\bar{S}_i$ 的这些边的端点构成 $G$ 的一个团,记为 $E_i$。对于超图 $\mathscr{E}=(E_1,E_2,\cdots,E_q)$,$G$ 中的每条边和每个顶点至少被一个 $E_i$ 所覆盖。因此,$\mathscr{E}$ 的对偶超图 $H=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 满足 $L(H)=[\mathscr{E}]_2=G$,且 $H$ 的阶数为 $q$。

2. 下面证明对每个使 $G=L(G)$ 成立的 $q$ 阶超图 $H=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,可

诱导出 $\bar{G}$ 的一个 $q$- 色分划$(S_1,S_2,\cdots,S_q)$。事实上,用 $E^k$ 表示 $H$ 中恰好属于 $k$ 个 $X_i$ 的顶点的集合,于是有

$$q = |E^1| + |E^2| + |E^3| + \cdots$$

对每个 $e \in E^1$,$e$ 只属于一个集 $X_{i(e)}$,对应于 $G$ 的一个 1- 团 $\{x_{i(e)}\}$;对 $e \in E^2$,$e$ 恰好属于二个集 $X_{i(e)}$ 和 $X_{j(e)}$,对应于 $G$ 的一个 2- 团 $\{x_{i(e)},x_{j(e)}\}$;对 $e \in E^3$,$e$ 恰好属于三个团 $X_{i(e)},X_{j(e)},X_{k(e)}$,对应于 $G$ 的一个 3- 团 $\{X_{i(e)},X_{j(e)},X_{k(e)}\}\cdots$

这就定义了由 $G$ 中 $q$ 个团构成的超图$(E_1,E_2,\cdots,E_q)$,显然,$G$ 的每条边 $[x_i,x_j]$ 至少属于其中的一个团。用 $\bar{S}_1$ 表示 $G$ 中含在团$E_1$ 内的边的集合,用 $\bar{S}_2$ 表示 $G$ 中含在团$E_2$ 内但不含在 $E_1$ 中的边的集合,…。于是簇$(\bar{S}_1,\bar{S}_2,\cdots,\bar{S}_q)$ 是 $\bar{G}$ 的一个 $q$- 色分划。

从上述 1.和 2.知,$\bar{G}$ 的色数等于使$G = L(H)$ 成立的超图的最小阶数。

**定理 17**　设 $G$ 是无孤立点、不含三角形的简单图,其边数为 $m$,则 $\Omega(G) = m$。

**证**　事实上,在引理中所定义的图 $\bar{G}$ 是团 $K_m$,因此 $\bar{G}$ 的色数是 $m$。于是 $\Omega(G) = m$。

**定理 18** (Erdös,Goodman,Pósa [1966])　设 $G$ 是 $n$ 阶无孤立顶点的简单图①,则

$$\Omega(G) \leqslant [n^2/4]$$

此外,对于 $n$,这上界是最好的。

**证**　1. 由图论的定理知,存在由图 $G$ 的 2- 团和 3- 团组成的超图 $\mathscr{C} = (E_1,E_2,\cdots,E_k)$ $(k \leqslant [n^2/4])$ 覆盖 $G$ 的边和顶点(见 Graphs,第 11 章,定理 5)。由于 $G = [\mathscr{C}]_2$ 是超图 $\mathscr{C}$ 的对偶的线图,且对偶超图的阶为 $k$,所以有

$$\Omega(G) \leqslant k \leqslant [n^2/4]$$

故上式成立。

2. 下面证明:对每个 $n$ 上式等号可达。

若 $n = 2k$,取 $G$ 为完全二部图$K_{k,k}$,由于 $G$ 没有孤立的顶点和三角形,由定理 17,有

$$\Omega(K_{k,k}) = k^2 = \frac{n^2}{4} = [n^2/4]$$

若 $n = 2k + 1$,取 $G$ 为完全二部图 $K_{k,k+1}$,同样有

$$\Omega(K_{k,k+1}) = k(k+1) = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n^2-1}{4} = [n^2/4]$$

因此上式等号可达。

---

① 原文没有简单图这一条件。

## 习 题 1

1.(§1) 给出一个使简单图的对偶也是简单图的条件。

2.(§1) 证明:(1) 若一个区间超图是简单的,则它的对偶也是一个区间超图;(2) 区间超图的子超图也是一个区间超图。

3.(§1) 求:(1) $K_n^r$ 的秩;(2) $K_n^r$ 的对偶超图 $(K_n^r)^*$ 的秩。

4.(§3) $H$ 是一个 $n$ 阶交簇,$r,s$ 分别为 $H$ 的秩和下秩。Hilton 证明了

$$m(H) \leqslant \sum_{i=s}^{r}\binom{n-1}{i-1}$$

证明上述结果推广了 Erdös, Chao-Ko, Rado 定理。

5.(§3) 证明:定理 6 蕴含着 Sperner 的定理(定理 2) 中的(1) 式。

6.(§3) 设超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 满足

$$E_j \not\subset E_k \qquad (j \neq k)$$

$$E_j \cap E_k \neq \varnothing$$

$$E_j \cup E_k = X$$

证明:$H'=(E_1,E_2,\cdots,E_m,X-E_1,X-E_2,\cdots,X-E_m)$ 是一个简单超图,并推导下面不等式(Schönheim [1968]):

$$m(H) \leqslant \frac{1}{2}\binom{n}{[n/2]}$$

且这上界可达。

7.(§3) 设 $\mathscr{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 是由 $n$ 个点组成的圈中的 $m$ 个圈区间簇,满足

(ⅰ) $|A_i| > n/2$

(ⅱ) $A_i \cap A_j \neq \varnothing \qquad (i \neq j)$①

(ⅲ) $A_i \not\subset A_j \qquad (i \neq j)$

证明:$m \leqslant n$。等号成立的充要条件是:$\mathscr{A}$ 是极大簇且 $\mathscr{A}$ 中所有不同圈区间有相同基数 $k$, $n > k > \frac{n}{2}$。

8.(§3) 设 $\mathscr{A}$ 是满足第 7 题中的条件(ⅱ)和(ⅲ)的圈区间簇,且对 $A \in \mathscr{A}$,令

$$p(A)=\begin{cases}\dfrac{n-|A|+1}{|A|} & \text{若} |A| \leqslant \dfrac{n}{2}\\[2ex] 1 & \text{若} |A| > \dfrac{n}{2}\end{cases}$$

---

① 这条件是多余的。

证明：$\sum p(A) \leqslant n$。

9.(§3)　(未解决问题)　设 $H$ 是 $X$ 上的 $n$ 阶超图，令 $k \geqslant 2$ 和 $t \leqslant n$ 均是整数，Erdös 和 Frankl [1979] 猜测：

$$I \subset \{1,2,\cdots,m\}, \qquad |I| = k$$

蕴含

$$|\bigcup_{i \in I} E_i| \leqslant n - t$$

又若 $m$ 是满足这条件的最大值，则对整数 $s$ 和基数为 $t + ks$ 的集 $Y$，

$$H = \{F \mid F \subset X, |F \cap Y| \leqslant s\}$$

Katona 证明了当 $k = 2, t \neq 1$ 时，以上猜测的正确。Frankl [1979] 证明了当 $k > 2, t < \frac{k2^k}{150}$ 时，以上猜测的正确性。

10.(§4)　利用定理 7 的证明方法证明：如果 $H$ 是一个遗传超图，则 $L(H)$ 的补图 $\overline{L(H)}$ 存在一个匹配，覆盖除奇分支中至多一个点外的 $\overline{L(H)}$ 中所有顶点 (Berge [1976])。

11.(§5)　利用定理 10 证明：区间超图的对偶超图具有 Helly 性质。

12.(§5)　考虑一列整数 $a_1 < m_1, a_2 < m_2, \cdots, a_k < m_k$，证明方程组

$$x \equiv a_i \bmod m_i \qquad (i = 1,2,\cdots,k)$$

有解的充要条件是对每对 $(i,j)$，$1 \leqslant i < j \leqslant k$，满足

$$a_i \equiv a_j \bmod gcd(m_i, m_j)$$

(利用定理 10 的推论)

13.(§5)　证明：对 $k \geqslant 3$，每个简单图是 $k$-Helly 的。

14.(§6)　利用 Frankl 的引理(定理 14 前的引理 2) 证明下面由 Lovász 给出的结果(它推广了定理 14 中的推论)。

设 $H$ 是一个 $r$- 一致超图，$x$ 是一个正实数，它满足

$$m(H) \geqslant \frac{x(x-1)\cdots(x-r+1)}{r!}$$

则

$$m([H]_{r-1}) \geqslant \frac{x(x-1)\cdots(x-r+2)}{(r-1)!}$$

15.(§8)　设 $d(m)$ 表示具有如下性质的集合 $X$ 的最小基数：每一个 $m$ 阶图是 $X$ 中至少有 $m$ 个不同子集构成的超图的线图。对 $m$ 归纳证明：

$$d(2) = 2$$

$$d(3) = 3$$

$$d(m) = \left[\frac{m^2}{4}\right] \qquad (若\ m \geqslant 4)$$

(Erdös, Goodman, Pósa [1966])

# 参 考 文 献


Aigner M., Some theorems on coverings, *Studia Sci. Math. Hung.* 5, 1970, 303 ~ 315.

Baranyai Z., On the factorization of the complete uniform hypergraph, *Infinite and Finite Sets* (A. Hajnal, R. Rado, V. T. Sós, eds.), North Holland, Amsterdam, 1975, 91 ~ 108.

Beineke L. W., On derived graphs and digraphs, *Beiträge zur Graphentheorie* (H. Sachs, H. J. Voss, H. Walther, eds.), Teubner 1968, 17 ~ 23.

Berge C., *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, Paris 1972.

Berge C., Nombres de coloration de l'hypergraphe $h$-parti-complet, *Ann. di Math. Pura Appl.* Ⅳ, 103, 1975, 3 ~ 9.

Berge C., *Introduction à la Théorie des Hypergraphes*, Les Presses de l'Univ. de Montréal, Montréal 1973.

Berge C., The Helly Property, *South-East Asian Math. Soc. Bull.* 1, 1979, 16 ~ 19.

Berge C., A theorem related to the Chvátal conjecture, *Proc. 5th British Combinatorial Conference* (Nash-Williams, Sheehan, eds.), Utilitas Math. 1976, 35 ~ 40.

Berge C., *On the chromatic index of a linear hypergraph and the Chvátal conjecture*, New York Acad. Sc. Proceedings 1985.

Berge C., and P. Duchet, A generalization of Gilmore's theorem, *Recent Advances in Graph Theory*, (M. Fiedler, ed.), Acad. Praha, Prague 1975, 49 ~ 55.

Berge C., and E. L. Johnson, Coloring the edges of a hypergraph and linear programming techniques, *Studies in Integer Programming*, Ann. of Discrete Math. 1, 1977, 65 ~ 78.

Bermond J. C., M. C. Heydemann, and D. Sotteau, Line graphs of hypergraphs, I, *Discrete Math.* 18, 1977, 235 ~ 241.

Bermond J. C., M. C. Heydemann, and D. Sotteau, Graphes représentatifs d'hypergraphes, *Colloque Codes et Hypergraphes*, Cahiers du C. E. R. O. 20, 1978, 325 ~ 329.

Bermond J. C., and J. C. Meyer, Graphes représentatifs des arêtes d'un multigraphe, *J. Math. Pures et Appl.* 52, 1973, 299 ~ 308.

Bollobás B., On generalized graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 16, 1965, 447 ~ 452.

Bollobás B., Sperner systems consisting of pairs of complementary subsets, *J. Comb. Theory. A*, 15, 1973, 363 ~ 366.

Bollobás B., and P. Duchet, Helly families of maximal size, *J. Comb. Theory A*, 26, 1979, 197 ~ 200.

Bollobás B., and P. Duchet, On Helly families of maximal size, *J. Comb. Theory B*, 35, 1983, 290 ~ 296.

Boonyasombat V., Degree sequences of connected hypergraphs and hypertrees, *Graph Theory*, Singapore 1983 (K. M. Koh, H. P. Yap, eds.) Lecture Notes in Math. 1073, Springer-Verlag 1984, 236 ~ 247.

Brace A., and D. E. Daykin, Sperner type theorems for finite sets, *Proc. Oxford Conference on Combinatorics*, 1972, IMA 1972.

Brouwer A. E., On the edge-colouring property for the hereditary closure of a complete uniform hypergraph, *Math. Centre report* EW 95/77, Amsterdam 1977.

Brouwer A. E., and R. Tudeman, Math. Centrum Internal Report 1978.

Chvátal V., Unsolved problem no. 7, *Hypergraph Seminar* (C. Berge, D. R. Ray-Chaudhuri, eds.), Lecture Notes in Math. 411, Springer Verlag, Berlin 1974.

Chvátal V., Intersecting families of edges in hypergraphs having the hereditary property, *Hypergraph Seminar* (C. Berge, D. K. Ray-Chaudhuri, eds.), Lecture Notes in Math. 411, Springer Verlag, Berlin 1974.

Clements G. F. , A minimization problem concerning subsets, *Discrete Math*. 4, 1973, 123 ~ 128.

Clements G. F. , The Kruskal-Katona Method made explicit, *J. Comb. Theory A*, 21, 1976, 245 ~ 249.

Daykin D. E. , A simple proof of the Kruskal-Katona theorem, *J. Comb. Theory A*, 17, 1974, 252 ~ 253.

Daykin D. E. , J. Godfrey, and A. J. Hilton, Existence theorems for Sperner families, *J. Comb. Theory A*, 17, 1974, 245 ~ 251.

Daykin D. E. , and L. Lovász, The number of values of a Boolean function, *J. London Math. Soc*. 12 (1976), 225 ~ 230.

Daykin D. E. , A. J. W. Hilton, and D. Miklós, Pairings from down-sets and up-sets in distributive lattices, *J. Comb. Theory A*, 34, 1983, 215 ~ 230.

Dewdney A. K. , Degree sequences in complexes and hypergraphs, *Proc. Am. Math. Soc*. 53, 1975, 535 ~ 540.

Erdös P. , Chao-Ko, and R. Rado, Intersection theorems for systems of finite sets, *Quart. J. Math. Oxford* 12, 1961, 313 ~ 318.

Erdös P. , On extremal problems of graphs and generalized graphs, *Israel J. Math*. 2, 1964, 183 ~ 190.

Erdös P. , A. W. Goodman, and L. Pósa, The representation of a graph by set intersections, *Canad. J. Math*. 18, 1966, 106 ~ 112.

Erdös P. , and D. J. Kleitman, Extremal problems among subsets of a set, *Discrete Math*. 8, 1974, 281 ~ 294.

Erdös P. , M. Herzog, and J. Schönheim, An extremal problem, *Israel J. Math*. 8, 1970, 408 ~ 412.

Erdös P. , and L. Lovász, Problems and results on 3-chromatic hypergraphs, *Infinite and Finite Sets*, (A. Hajnal, R. Rado, V. T. Sós, eds. )Proc. Soc. J. Bolyai, 10, North Holland 1974, 609 ~ 627.

Erdös P. , P. Frankl, and G. O. H. Katona, Intersecting families and their convex hull, *Combinatorica* 4, 1984, 21 ~ 34.

- Frankl P. , The proof of a conjecture of G. O. H. Katona, *J. Comb. Theory A*, 19, 1975, 208 ~ 213.

Frankl P. , Sperner systems satisfying an additional condition, *J. Comb. Theory A*, 20, 1976, 1 ~ 11.

Frankl P. , On intersecting families of finite sets, *J. Comb. Theory A*, 24, 1978, 146 ~ 161.

Frankl P. , Families of finite sets satisfying a union condition, *Discrete Math*. 21, 1979, 111 ~ 118.

Frankl P. , A new short proof for the Kruskal-Katona Theorem, *Discrete Math*. 48, 1984, 327 ~ 329.

Frankl P. , and Z. Füredi, On hypergraphs without two edges intersecting in a given number of vertices, *J. Comb. Theory A*, 36, 1984, 230 ~ 236.

Füredi Z. , On maximal intersecting families of finite sets, *J. Comb. Theory A*, 28, 1980, 282 ~ 289.

Gardner M. L. , On the impossibility of a finite forbidden configuration characterization of the graphs which are intersection graphs of $r$-graphs, (in preparation).

Gilmore P. C. , and R. E. Gomory, A linear programming approach to the cutting stock problem, *Operat. Res*. Ⅰ, 1961, 849 ~ 859; Ⅱ, 1963, 863 ~ 889.

Greene C. , G. O. H. Katona, and D. J. Kleitman, Extensions of the Erdös-Ko-Rado Theorem, *Recent Advances in Graph Theory*, Academia Praha 1975, 223 ~ 231. SIAM J. 55, 1976, 1 ~ 8.

Greene C. , and D. J. Kleitman, The structure of Sperner $k$-families, *J. Comb. Theory A*, 20, 1976. 41 ~ 68.

Greene C. , Some partitions associated with a partially ordered set, *J. Comb. Theory A*, 20, 1976, 69 ~ 79.

Gyárfás A. , A note on hypergraphs with the Helly property, *Discrete Math*. 24, 1978. 221 ~ 223.

Gyárfás A. , and J. Lehel, A Helly-type theorem on trees, *Combinatorial Theory and Its Applications* (Erdös, Rényi, Sós, eds. )North-Holland, Amsterdam-London 1970, 571 ~ 584.

Heydemann M. C. , and D. Sotteau, Line graphs of hypergraphs, Ⅱ, Combinatorics (*Coll. Math. Sc. János Bolyai* 1976), North Holland 1978.

Hilton A. J. W. , Some intersection and union theorems for several families of finite sets, *Mathematika* 25,

1978, 125 ~ 128.

Hilton A. J. W., An intersection theorem for a collection of families of subsets of a finite set, *J. London Math. Soc*. 15, 1977, 369 ~ 376.

Hilton A. J. W., On order set systems, *Mathematika* 28, 1981, 54 ~ 66.

Hilton A. J. W., The Erdös-Ko-Rado theorem with a valency condition, (in preparation).

Hilton A. J. W., Analogues of a theorem of Erdös, Ko, Rado, on a family of finite sets, *Quart. J. Math*. 25, 1974; 27, 1976, 33 ~ 36.

Hilton A. J. W., and E. C. Milner, Some intersection theorems for systems of finite sets, *Quart. J. Math*. Oxford 18, 1967, 369 ~ 384.

Hochberg M., and W. M. Hirsch, Sperner families, set-systems and a theorem of Meshalkin, *Annals New York Acad. Sc*. 175, 1970, 224 ~ 237.

Hoffman A. J., On the line graph of the complete bipartite graph, *Ann. Math. Stat*. 35, 1964, 883 ~ 885.

Katona G. O. H., On a conjecture of Erdös and a stronger form of Sperner's theorem, *Studia Sc. Math. Hungar*. 1, 1966, 59 ~ 63.

Katona G. O. H., Intersection theorems for systems of finite sets, *Acta Math. Acad. Sc. Hung*. 15, 1964, 329 ~ 337.

Katona G. O. H., A simple proof of Erdös-Chao Ko-Rado theorem, *J. Comb. Theory B*, 13, 1972, 183 ~ 184.

Katona G. O. H., A theorem of finite sets, *Theory of Graphs*, Akadémia Kiadó, Budapest 1968, 187 ~ 207.

Kleitman D. J., Maximal number of subsets of a finite set no $k$ of which are pairwise disjoint, *J. Comb. Theory* 5, 1968, 157 ~ 163.

Kleitman D. J., Families of non-disjoint subsets, *J. Comb. Theory* 1, 1966, 153 ~ 155.

Kleitman D. J., On a combinatorial conjecture of Erdös, *J. Comb. Theory* 1, 1966, 209 ~ 214.

Kruskal J. B., The number of simplices in a complex, *Mathematical Optimization Techniques*, Univ. of California Press 1963, 251 ~ 278.

Lindner C. C., A. and Rosa (eds.), Topics on Steiner Systems, *Annals of Discrete Math*. 7, North Holland 1980.

Lovász L., *Combinatorial Problems and Exercises*, 13. 31, North Holland, Amsterdam 1979.

Lubell D., A short proof of Sperner's theorem, *J. Comb. Theory* 1, 1966, 299.

Meshalkin L. D., A generalization of Sperner's theorem on the number of subsets of a finite set, *Theor. Probability Appl*. 8, 1963, 203 ~ 204. Teor. Ver. 8, 1963, 219 ~ 220.

Meyer J. C., Quelques problèmes concernant les cliques des hypergraphes $h$-complets et $q$-parti $h$-complets, *Hypergraph Seminar* (Berge, Ray-Chaudhuri, eds.), Lecture Notes in Math. 411, Springer-Verlag 1974, 127 ~ 139 and 285 ~ 286.

Mulder H. M., The number of edges in a $k$-Helly hypergraph, *Annals of Discrete Math*. 17, 1983, 497 ~ 501.

Milner E. C., A combinatorial theorem on systems of sets, *J. London Math. Soc*. 43, 1966, 204 ~ 206.

Naik R. N., S. B. Rao, S. S. Shrikhande, and N. W. Singhi, Intersection graphs of $k$-uniform linear hypergraphs, *Europ. J. Combinatorics* 3, 1982, 159 ~ 172.

Nickel L., *Private communication*, 1976.

Ore O., The Chinese remainder theorem, *Am. Math. Monthly* 59, 1952, 365 ~ 370.

Peltesohn, R., Das Turnierproblem, Thesis, Friederich Wilhelmns Univ., Berlin 1933.

Ramachandra Rao A., Some extremal problems and characterizations in the theory of graphs, Thesis, I. S. I., Calcutta 1969.

Ray-Chaudhuri D. K., Characterizations of line graphs, *J. Comb. Theory* 3, 1967, 201 ~ 214

Schönheim J., On a problem of Daykin concerning intersecting families of sets, *Combinatorics*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 13, Cambridge Univ. Press 1974, 139 ~ 140.

Schönheim J., Hereditary systems and Chvátal's conjecture, *Proc. 5th British Combinatorial Conference* 1975, 537 ~ 539.

Shrikhande, S. S., On a characterization of the trianguler association scheme, *Ann. Math. Stat.* 30 1959, 39 ~ 47.

Sperner E., Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, *Math. Z.* 27, 1928, 544 ~ 548.

Sterboul F., Sur une conjecture de V. Chvátal, *Hypergraph Seminar*, Lecture Notes in Math. 411, Springer Verlag, Berlin 1974, 152 ~ 164.

Stein P., and J. Schönheim, On Chvátal's conjecture related to hereditary systems, *Ars Combinatoria* 5, 1978, 275 ~ 291.

Stein P., Chvátal's conjecture and point-intersections, *Discrete Math.* 43, 1983, 321 ~ 323.

Tijdeman R., On the edge-colouring property of the hereditary closure of a complete uniform hypergraph II, *Math. Centre report* 106/78, Amsterdam 1978.

Tuza Z., Helly-type hypergraphs and Sperner families, *Europ. J. Combinatorics* 5, 1984, 185 ~ 187.

Wang D.-L., and P. Wang, Some results about the Chvátal conjecture, *Discrete Math.* 24, 1978, 95 ~ 101.

Wegner G., Eigenshaften der Neuen homologisch einfacher Familien in $\mathbf{R}^n$, Thesis, Göttingen 1965.

Wilson R. M., An existence theory for pairwise balanced designs, II, *J. Comb. Theory A*, 13, 1972, 246 ~ 273.

Wilson R. M., The exact bound in the Erdös-Ko-Rado theorem, *Combinatorica* 4, (2-3), 1984, 247 ~ 258.

Yamamoto K., Logarithmic order of free distributive lattices, *J. Math. Soc. Japan*, 6, 1954, 343 ~ 353.

# 第 2 章　横贯与匹配

## 1　横贯超图

设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是 $X$ 上的超图，若集合 $T\subset X$ 与 $H$ 中每条边相交，即

$$T\cap E_i\neq\varnothing\qquad(i=1,2,\cdots,m)$$

则称 $T$ 是 $H$ 的一个**横贯**。

$H$ 的极小横贯簇构成 $X$ 上的一个简单超图，称为 $H$ 的**横贯超图**，记为 $T_rH$。

**例 1**　若超图是简单图 $G$，$S$ 是不含边的点集，即 $X-S$ 与 $G$ 的所有边相交，则称 $S$ 为**独立集**。于是

$$T_rG=\{X-S\mid S\text{ 是 }G\text{ 的极大独立集}\}$$

**例 2**　$K_n^r$ 是 $X$ 上完全 $r$- 一致超图，$X$ 上所有 $n-r+1$ 元子集都是 $K_n^r$ 的极小横贯，因此

$$T_r(K_n^r)=K_n^{n-r+1}$$

**例 3**　考察完全 $r$- 部超图 $K^r_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$，其中顶点集是 $X^1\cup X^2\cup\cdots\cup X^r$，边是 $r$- 元集 $\{x^1,x^2,\cdots,x^r\}$，这里 $x^1\in X^1,x^2\in X^2,\cdots,x^r\in X^r$。显然 $X^1,X^2,\cdots,X^r$ 是所有的极小横贯。因为若存在一个不同于 $X^1,X^2,\cdots,X^r$ 的极小横贯 $T$，则对每个 $i$，存在 $a_i\in X^i-T$，集 $\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$ 与 $T$ 不相交，但它是超图的一条边，矛盾。因此，除集 $X^1,X^2,\cdots,X^r$ 外没有其他的极小横贯，故

$$T_r(K^r_{n_1,n_2,\cdots,n_r})=(X^1,X^2,\cdots,X^r)$$

**例 4**　令 $G$ 是一个运输网络，即“发点”为 $a$，“收点”为 $z$ 的有向图（见 Graphs，第 6 章）。$G$ 中从 $a$ 到 $z$ 的路上的弧集作为 $H$ 的一条边。显然 $H$ 是简单超图，并且 $T_rH$ 是 $a$ 与 $z$ 之间的极小割集簇。

对推广的“弧着色引理”，它的证明建立在运输网络（例 4）的研究的基础上。现叙述如下：

**点着色引理**　设 $H=(E_1,E_2,\cdots)$ 和 $H'=(F_1,F_2,\cdots)$ 是 $X$ 上两个简单超图，则 $H'=T_rH$ 当且仅当对 $X$ 的任意二分划 $(A,B)$ 满足：

（ⅰ）或者存在一条边 $E\in H$ 含于 $A$ 中，或者有一条边 $F\in H'$ 含于 $B$ 中；

（ⅱ）上述两种情况不能同时出现。

**证**　1. 设 $H'=T_rH$，考虑 $X$ 的一个二分划 $(A,B)$。如果 $A$ 含一条边 $E\in H$，则（ⅰ）成立。否则，$X-A=B$ 是 $H$ 的一个横贯，因此 $B$ 含一个极小横贯 $T\in$

$T_rH$。故 $T$ 是 $H'$ 的一条边 $F$，且 $F \subset B$。于是(ⅰ)成立。此外(ⅱ)是显然的。

2. 设 $H'$ 和 $H''$ 是两个简单超图，使得对 $X$ 的任意二分划 $(A,B)$，关于 $H$ 和 $H'$ 以及 $H$ 和 $H''$ 均满足(ⅰ)和(ⅱ)。下面只需证明 $H' = H''$。这因为由 1.，$H$ 和 $H'' = T_rH$ 满足(ⅰ)和(ⅱ)，从而有 $H' = T_rH$。

若 $H' \neq H''$，则存在 $F' \in H' - H''$，考虑 $X$ 上的二分划 $(X - F', F')$，它关于 $H$ 和 $H'$ 满足(ⅱ)，$H$ 中不存在一条边 $E$ 含于 $X - F'$。又因二分划 $(X - F', F')$ 关于 $H$ 和 $H''$ 满足(ⅰ)，故存在 $F'' \in H''$ 使得 $F'' \subset F'$。与上面一样，$X - F''$ 中不含 $H$ 的边，对二分划 $(X - F'', F'')$ 关于 $H$ 和 $H'$ 满足(ⅰ)，故存在 $F_1' \in H'$ 且 $F_1' \subset F''$。于是，$F_1' \subset F'' \subset F'$。由于 $H'$ 是简单超图，所以 $F_1' = F'$，从而 $F' \in H''$，矛盾。由对称性，也不存在边 $F'' \in H'' - H'$，因此 $H' = H''$。

**推论 1**　设 $H$ 和 $H'$ 是两个简单超图，则 $H' = T_rH$ 当且仅当 $H = T_rH'$。

事实上，$H' = T_rH$ 当且仅当对 $X$ 的每一个二分划 $(A,B)$ 关于 $H$ 和 $H'$ 满足(ⅰ)和(ⅱ)，即每一对 $X$ 的二分划 $(B,A)$ 关于 $H'$ 和 $H$ 满足(ⅰ)和(ⅱ)，故 $H = T_rH'$。

**推论 2**　设 $H$ 是简单超图，则 $T_r(T_rH) = H$。

用推论 1 即可得证。

**应用(保险箱的钥匙问题)**　设管理委员会成员的集合为 $X$，每个成员具有一定的决策权重。对每个 $E \subset X$，使 $E$ 中各成员权重的和不小于事先给定的阈值，从而能对具有多把锁的保险箱存取文件。能打开保险箱的极小成员集合 $E$ 构成一个简单超图 $H$。本问题是确定给每个成员一把或多把钥匙所必需的锁的数量，使得这保险箱能被打开的充要条件是：至少有 $H$ 的一条边的成员在现场。

若 $T_rH = (F_1, F_2, \cdots, F_m)$，并把第 $i$ 把锁的钥匙分给 $F_i$ 中的每个成员，显然，每个 $E \in H$ 能打开上述保险箱；反之，若 $A \subset X$ 不含 $H$ 的边，由推论 2，$A$ 不是 $T_rH$ 的横贯，故 $A$ 中成员不能打开这保险箱。因此所需锁的最小数量是 $m(T_rH)$。特别地，若这个管理委员会中 $n$ 个成员均有相同的权重，且打开保险箱必须有 $r$ 个成员在现场，则需要锁的数量是

$$m(K_n^{n-r+1}) = \binom{n}{n-r+1}$$

下面讨论一个交簇图的横贯超图。设 $H$ 和 $H'$ 是 $X$ 上的两个简单超图，若 $H$ 的每一条边也是 $H'$ 的一条边，则记为 $H \subset H'$；若 $H \subset H'$ 且 $H' \subset H$，则记为 $H = H'$；若 $H$ 的每一条边含 $H'$ 的一条边，则记为 $H \prec H'$。因此

$$H \subset H' \Rightarrow H \prec H'$$

**引理 1**　如果 $H$ 和 $H'$ 是 $X$ 上的两个简单超图，则

$$\left.\begin{array}{l} H \prec H' \\ H' \prec H \end{array}\right\} \Rightarrow H = H'$$

**证**　事实上，由于 $H \prec H'$，$H$ 的每一条边 $E_i$ 含 $H'$ 的一条边 $F$。又因为 $H' \prec H$，$H'$ 的边 $F$ 也含 $H$ 的一条边 $E_j$，所以

$$E_i \supset F \supset E_j$$

但因 $H$ 是简单超图，故有 $i = j$。因此，$H$ 的每一条边也是 $H'$ 的一条边。由对称性，$H = H'$。

**引理 2**　$H$ 是无环简单超图，则 $\chi(H) > 2$ 当且仅当 $T_rH \prec H$，这 $\chi(H)$ 是 $H$ 的色数(见第 4 章，§1)。

**证**　事实上，如果 $\chi(H) > 2$，则有 $T_rH \prec H$。否则存在 $T \in T_rH$ 不包含 $H$ 的边，则对二分划 $(T, X - T)$，$H$ 中没有一条边含于 $T$ 和 $X - T$ 中，即 $(T, X - T)$ 是 $H$ 的一个二色划分，这与 $\chi(H) > 2$ 相矛盾。

反之，如果 $T_rH \prec H$，则有 $\chi(H) > 2$。否则存在 $H$ 的一个二色分划 $(A, B)$。由点着色引理，$B$ 含一个集 $T \in T_rH$，再由于 $T_rH \prec H$，存在 $E \in H$ 使得 $B \supset E$，这与 $(A, B)$ 是 $H$ 的二色分划相矛盾。

**引理 3**　超图 $H$ 是交簇的充要条件是：$H \prec T_rH$。

**证**　若 $H$ 是交簇，每一个 $E \in H$ 是 $H$ 的横贯，因而 $E$ 含一个极小横贯 $T \in T_rH$，所以 $H \prec T_rH$。

反之，如果 $H \prec T_rH$，每个 $E \in H$ 含 $H$ 的一个极小横贯，因此 $E$ 与 $H$ 的每条边相交，即 $H$ 是交簇。

**定理 1**　$H$ 是无环的简单超图，则 $H = T_rH$ 当且仅当

(ⅰ) $\chi(H) > 2$

(ⅱ) $H$ 是交簇

由引理 1,2 和 3 可得定理。

**推论**　设 $H$ 是无环简单交簇超图，则 $\chi(H) = 2$ 或 $\chi(H) = 3$。若 $H'$ 表示将 $H$ 中某条边 $E$ 用 $E \cup \{x\}$，$x \in X - E$ 来代替所得的超图，则 $H'$ 是 2 可着色。

**证**　事实上，如果 $\chi(H) > 2$，由定理 1，$H = T_rH$。因此 $H$ 的边 $E$ 是 $H$ 的横贯，因而也是 $H'$ 的横贯，从而有 $E \cup \{x\} \notin T_rH'$，所以 $H' \neq T_rH'$。由定理 1 有 $\chi(H') = 2$。

在 $H'$ 的 2-着色中，用没有用过的第 3 色对 $y \in E$ 着色，就得 $H$ 的正常 3-着色。因此 $\chi(H) = 3$。

下面给出使 $H = T_rH$ 成立的几个超图例子。

**例 1**　完全 $r$-一致超图 $K_{2r-1}^r$ 满足 $T_r(K_{2r-1}^r) = K_{2r-1}^r$。

**例 2**　7 个点的有限射影平面 $P_7$ 满足 $T_r(P_7) = P_7$，$P_7$ 是一个交簇且不是 2 可着色。若用两种颜色 + 和 − 对 $P_7$ 的顶点着色，那么最后一个顶点就不能是 +，也不能是 −(见图 1)。

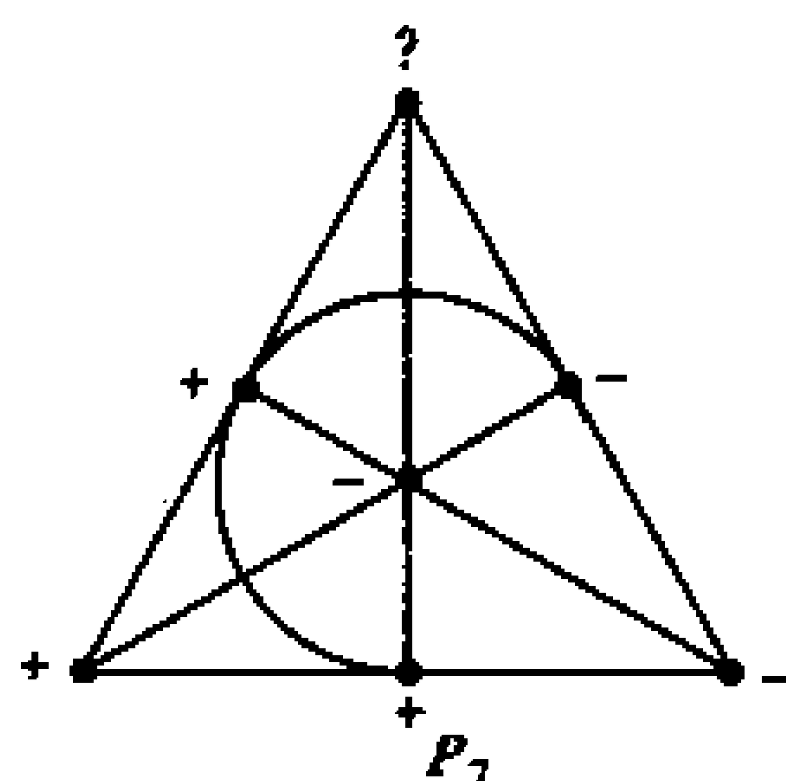



图 1

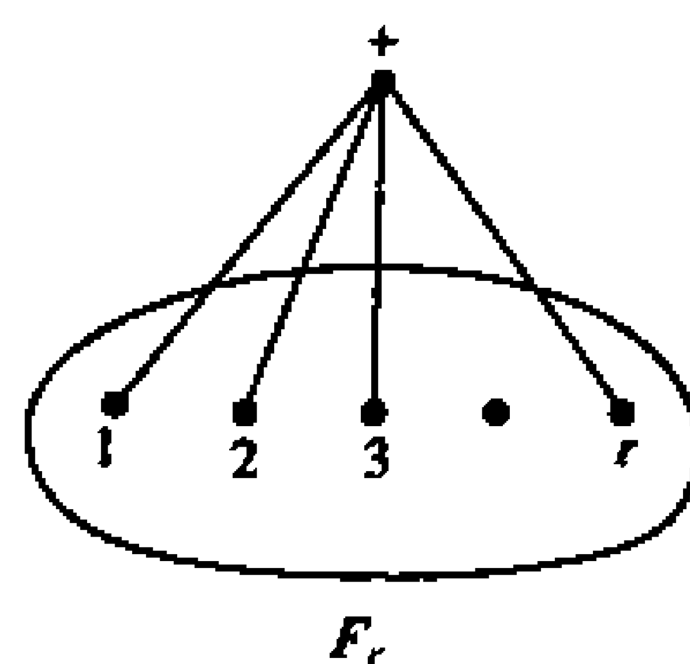



图 2

**例 3**　秩为 $r$ 的扇形超图 $F_r$ 定义为：有 $r$ 条基数为 2 的和 1 条基数为 $r$ 的边组成，如图 2 所示。$F_r$ 是一个交簇且不是 2 可着色，故 $T_r(F_r) = F_r$。

**例 4**　**Lovász 超图** $L_r$ 定义为：顶点集由 $r$ 个点集 $X^1 = \{x_1^1\}, X^2 = \{x_1^2, x_2^2\}, X^3 = \{x_1^3, x_2^3, x_3^3\}, \cdots, X^r = \{x_r^1, x_r^2, \cdots, x_r^r\}$ 的并组成，边为所有如下的集合：

$$X^i \cup \{x_{k_1}^{i+1}, x_{k_2}^{i+2}, \cdots, x_{k_{r-i}}^r\}$$

显然，$L_r$ 是交簇，且 $\chi(L_r) > 2$。否则，存在一个二色分划 $(A, B)$，使得 $X^i$ 中至少有一个是单色的（特别是 $X^1$，因为 $|X^1| = 1$）。令 $i$ 是使 $X^i$ 为单色的最大整数，则存在一条单色边 $X^i \cup \{x_{k_1}^{i+1}, x_{k_2}^{i+2}, \cdots, x_{k_{r-i}}^r\}$，这与 $(A, B)$ 是 $L_r$ 的 2 着色分划相矛盾。因此由定理 1，$T_r(L_r) = L_r$。

**例 5**　用上例相同的方法，利用定理 1，可证明 $\overline{L}_3 = (X - E | E \in L_3)$ 满足 $T_r(\overline{L}_3) = \overline{L}_3$。

**例 6**　**广义扇形超图** $H$ 定义为：$r$ 个不同的集 $E_1, E_2, \cdots, E_r$，满足 $E_i \cap E_j = \{x_0\}\ (i \neq j)$，$2 = |E_1| \leqslant |E_2| \leqslant \cdots \leqslant |E_r|$ 作为 $H$ 的边，再加上关于 $(E_1 - \{x_0\}, E_2 - \{x_0\}, \cdots, E_r - \{x_0\})$ 的完全 $r$- 部超图中的边。用同样的方法可证明 $T_rH = H$。

下面通过图表（图 3）描述具有性质 $T_rH = H$ 的超图 $H$ 的各种性质，并将证明图表中前面性质所没有证明的一些蕴含关系。

**性质 1**　$H$ 是一个简单超图，则下列两个条件等价：

（ⅰ）$H$ 无环，且 $\chi(H) > 2$；

（ⅱ）$T_rH$ 是交簇的但不是星。

若（ⅰ）成立，由引理 2 有 $T_rH \prec H$。又由于 $H$ 无环，故超图 $H' = T_rH$ 不是星。因此 $H' = T_rH \prec H = T_rH'$。由引理 3 可知，$H'$ 是交簇。用同样的方法可证：若（ⅱ）成立，则（ⅰ）也成立。

**性质 2**　每一个满足(7) 的超图必满足(8)。

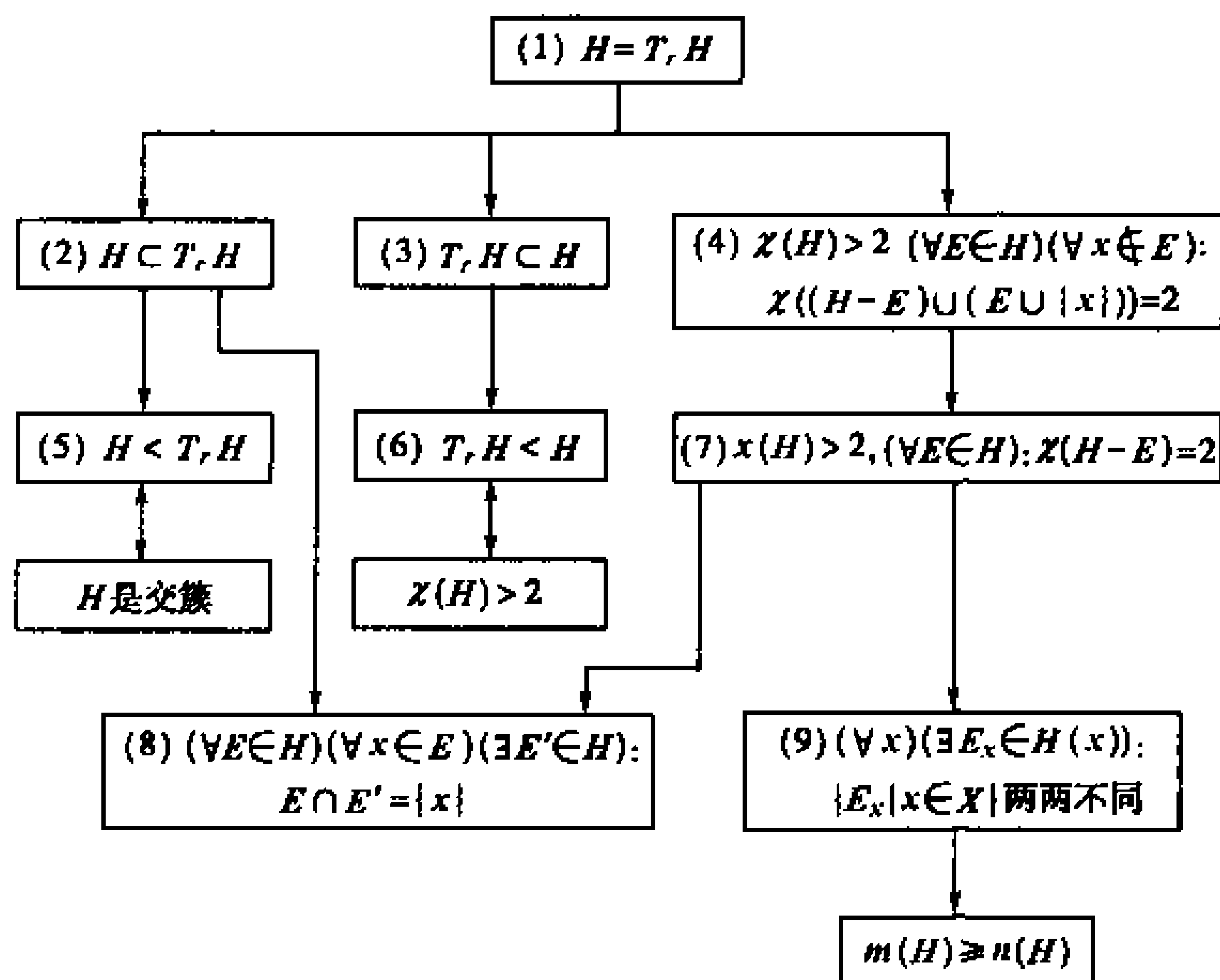



图 3

注意到:若 $H$ 满足(7),则 $H$ 是无环的简单超图。

由于$\chi(H-E)=2$,则存在 $H-E$ 的一个二色分划$(A,B)$,且 $E$ 在这个二色分划中是单色的。不失一般性假设 $E\subset A$。对 $E$ 中任意一个顶点 $x$,若改变 $x$ 的颜色,则 $H$ 中一定存在着 $B$ 的颜色的单色边 $E'$,故 $E\cap E'=\{x\}$,即(8)成立。

**性质 3** 设 $H$ 是无环简单超图,满足(2),则 $H$ 必满足(8)。

由于每一条边 $E\in H$ 是 $H$ 的极小横贯,因此 $E-\{x\}$ 与 $H$ 中某一条边 $E'$ 不相交,故有 $E\cap E'=\{x\}$,即(8)成立。

**性质 4**(Seymour [1974]) 设 $H$ 是 $X$ 上的一个超图且满足(7)。令 $A\subset X$,则不存在 $A$ 的二分划$(A_1,A_2)$,使 $A_1$ 和 $A_2$ 都是 $H_A$ 的横贯集。

**证** 注意到由于 $H$ 满足(7),则 $H$ 是无环简单超图。若存在 $A$ 的二分划$(A_1,A_2)$,使 $A_1$ 和 $A_2$ 都是 $H_A$ 的横贯,考虑部分超图

$$H'=(E|E\in H,E\cap A=\emptyset)$$

则 $H'\neq\emptyset$,否则$(A_1,A_2)$可以扩张成为 $H$ 的二色分划。因为 $A\neq\emptyset$,故 $H'\neq H$。因此由(7),超图 $H'$ 有二色分划$(B_1,B_2)$,且 $B_1\cup B_2\subset X-A$。由于 $H$ 无环,故任意的 $E\in H'$ 有 $E\cap B_1\neq\emptyset$,$E\cap B_2\neq\emptyset$。此外对 $E\in H-H'$ 有

$$E\cap A_1\neq\emptyset,\qquad E\cap A_2\neq\emptyset$$

于是$(A_1\cup B_1,A_2\cup B_2)$为 $H$ 的二色划分,这与(7)相矛盾。

**性质 5**(Seymour[1974]) $H$ 是 $X$ 上满足(7)的一个超图,则对每一个 $A\subset X$,$A$ 与 $H$ 中至少$|A|$条边相交,仅当 $A=\emptyset$ 或 $A=X$ 时等号才有可能成立。

(*) **证**　下面分三种情况考虑：

**情况1**　$A = \varnothing$。这结论是平凡的。

**情况2**　$A = X$。由 $H$ 的关联矩阵 $M$ 定义 $m(H) = m$ 个方程组成的线性方程组：$M^{T}\mathbf{z} = \mathbf{0}$。若 $m < |X| = n$，即有 $m$ 个方程 $n$ 个未知量，则存在一个解 $(z_1, z_2, \cdots, z_n) \neq \mathbf{0}$。令

$$A' = \{x_i \mid z_i \neq 0\}, \qquad A^{+} = \{x_i \mid z_i > 0\}, \qquad A^{-} = \{x_i \mid z_i < 0\}$$

显然，$(A^{+}, A^{-})$ 是 $A'$ 的一个二分划，并且 $A^{+}$ 和 $A^{-}$ 是 $H_{A'}$ 的两个横贯，这与性质4相矛盾，因此 $m \geqslant n$。从而结论成立。

**情况3**　$A \neq \varnothing, A \neq X$。令

$$H' = \{E \mid E \in H, E \subset A\}$$
$$H'' = \{E \mid E \in H, E \cap A = \varnothing\}$$

由于 $A \neq X, A \neq \varnothing$，故有 $H' \neq H, H'' \neq H$。又由于 $H$ 满足(7)，故存在 $H'$ 的一个二色分划 $(A_1, A_2)$ 及 $H''$ 的一个二色分划 $(B_1, B_2)$。因为 $\chi(H) > 2$，所以 $(A_1 \cup B_1, A_2 \cup B_2)$ 不是 $H$ 的二色分划，故有

$$H \neq H' \cup H''$$

于是，存在一条边 $E_0 \in H - (H' \cup H'')$ 满足

$$(1)\begin{cases} E_0 \not\subset A \\ E_0 \cap A \neq \varnothing \end{cases}$$

假设 $A$ 与 $H$ 中相交的边数不超过 $|A|$。如同情况2可知，存在一个 $A$ 上的不全为零的实函数 $z(x)$ 使得

$$\sum_{x \in E \cap A} z(x) = 0 \qquad (E \in H - E_0)$$

令

$$\bar{z}(x) = \begin{cases} z(x) & 若\ x \in A \\ 0 & 若\ x \notin A \end{cases}$$

则

$$\sum_{x \in E} \bar{z}(x) = 0 \qquad (E \in H - E_0)$$

由于 $A^{+} = \{x \mid \bar{z}(x) > 0\}, A^{-} = \{x \mid \bar{z}(x) < 0\}$，有 $\sum\limits_{x \in E_0} \bar{z}(x) \neq 0$，否则与性质4矛盾。不妨设

$$\sum_{x \in E_0} \bar{z}(x) > 0$$

由性质4，$E_0 \cap A^{-} = \varnothing$。

令 $H_1 = \{E \mid E \in H, E \subset X - (A^{+} \cup A^{-})\}$，由于 $H \neq H_1$，$H_1$ 是2可着色，令 $(B'_1, B'_2)$ 为 $H_1$ 的一个二色分划。

由于对任意的 $E \in H$，有 $E \in H_1$ 或 $E \cap A^{+} \neq \varnothing$，故集合 $A^{+} \cup B'_1$ 是 $H$ 的

横贯。又由于 $T_rH \prec H$，于是存在 $H$ 的一条边 $E_1$ 含在 $A^+ \cup B_1'$ 中。

若 $E_1 \subset B_1'$，则 $E_1 \in H_1$，这与 $(B_1', B_2')$ 是 $H_1$ 的二色分划相矛盾。因此 $E_1 \cap A^+ \neq \emptyset$，所以

$$\sum_{x \in E_1} \bar{z}(x) > 0$$

因此 $E_1 = E_0$，且有

(2) $E_0 \subset A^+ \cup B_1'$

用同样的方法可得

(3) $E_0 \subset A^+ \cup B_2'$

但 $B_1'$ 与 $B_2'$ 不相交，于是由(2)及(3)可得 $E_0 \subset A^+ \subset A$，这与(1)相矛盾。

**性质 6** 每一个满足(7)的超图也满足(9)。

设 $G = (X, H; \Gamma)$ 是超图 $H$ 的点-边关联二部图，由于 $H$ 满足(7)，由性质 5 可知，对每个 $A \subset X$，有 $|\Gamma A| \geqslant |A|$。再由 König 定理知，对每个顶点 $x \in X$，存在一条对应的边 $E_x \in H(x)$，且这些边 $E_x$ 两两不同。故(9)成立。

我们已推导出 $m(H) \geqslant n(H)$。至于 $m(H) = n(H)$ 的刻画由下面定理给出。

**定理 2**(Seymour [1974]) 设超图 $H$ 满足(7)且 $m(H) = n(H)$。对任意顶点 $x \in X$，存在一条边 $E_x \in H(x)$ 与之相对应，且使得 $E_x (x \in X)$ 两两不同。定义 $X$ 上的有向图 $G$，在 $G$ 中有从 $x$ 到 $y$ 的弧当且仅当 $y \in E_x$，则 $G$ 是强连通且不含偶圈。反之，如果 $G = (X, \Gamma)$ 是 $X$ 上的强连通有向图且不含偶圈，则关于 $X$ 上的超图 $H_G = (\{x\} \cup \Gamma_x | x \in X)$ 满足(7)且 $m(H_G) = n(H_G)$。

本定理可由前面的性质获得证明(见 Seymour [1974])。

**推论** 若超图 $H$ 满足(7)且 $m(H) = n(H)$，则 $H$ 的对偶 $H^*$ 也满足(7)且 $m(H^*) = n(H^*)$。

在这种情况下，点-边关联二部图的最大匹配建立了 $H$ 的点集和 $H$ 的边集之间的一一对应关系。因此 $G_H$ 和 $G_{H^*}$ 有相同的性质。

**确定 $T_rH$ 的算法** 设 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 和 $H' = (F_1, F_2, \cdots, F_{m'})$ 是两个超图，令

$$H \cup H' = (E_1, E_2, \cdots, E_m, F_1, F_2, \cdots, F_{m'})$$

$$H \vee H' = (E_i \cup F_j | i \leqslant m, j \leqslant m')$$

$$\min H = (E | E \in H; (\forall F \in H, F \subset E) : F = E)$$

则我们有

$$T_r(H \cup H') = \min(T_rH \vee T_rH')$$

事实上，$T_0$ 是 $H \cup H'$ 的横贯当且仅当 $T_0$ 是 $H$ 和 $H'$ 的横贯，即

$$T_0 \supset T \cup T'$$

这里 $T \in T_rH, T' \in T_rH'$，或等价于

$$T_0 \in T_rH \vee T_rH'$$

故上式成立。

确定 $T_rH$ 没有多项式算法，它是一个 NP- 完全问题。不过，对于点数较少的超图有几个有效的手工方法(Maghout [1966], Lawler [1966], Roy [1970] 等)。利用公式(1)于下面的方法：

设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 和 $H_i=(E_1,E_2,\cdots,E_i)$。利用公式(1)，依次确定下面的序列 $T_rH_1, T_rH_2,\cdots,T_rH_i\cdots$

$$T_rH_1 = (\{x\} \mid x \in E_1)$$

$$T_rH_2 = T_r(H_1 \cup \{E_2\}) = \min(T_rH_1 \vee (\{x\} \mid x \in E_2))$$

$$\vdots$$

$$T_rH_i = T_r(H_{i-1} \cup \{E_i\}) = \min(T_rH_{i-1} \vee (\{x\} \mid x \in E_i))$$

$$\vdots$$

最后可得 $T_rH_m = T_rH$。

## 2 系数 $\tau$ 和 $\tau'$

对于超图 $H$，用 $\tau(H)$ 表示 $H$ 的最小横贯的基数，称为 $H$ 的横贯数。同样，用 $\tau'(H)$ 表示 $H$ 的极小横贯的最大基数。显然有

$$\tau(H) = \min_{T \in T_rH} |T| \leqslant \max_{T \in T_rH} |T| = \tau'(H)$$

**例1 阶为 $r$ 的有限射影平面。**由定义，阶为 $r$ 的射影平面是一个有 $r^2-r+1$ 个顶点("点")和 $r^2-r+1$ 条边("线")的超图，满足下面公理：

(1) 每个点恰好属于 $r$ 条线；

(2) 每条线恰好含有 $r$ 个点；

(3) 每两个不同的点含在且只含在一条线上；

(4) 两条不同的线有且只有一个公共点。

对每个值 $r$，$r$ 阶射影平面未必存在(如 $r=7$)，但是，若 $r=p^\alpha+1$，其中素数 $p \geqslant 2, \alpha \geqslant 1$，则存在 $p^\alpha$ 元的域上的阶为 $r$ 的射影平面，记为 $PG(2,p^\alpha)$。例如，七个点的射影平面("Fano 构形")是 $PG(2,2)$。

易知射影平面的每条线是 $H$ 的极小横贯。当 $H$ 是七个点的射影平面时，因为 $H=T_rH$，$H$ 中没有其他的极小横贯。当 $H$ 是阶 $r>3$ 的射影平面时，有 $\tau(H)=r$，但存在基数 $\geqslant r+2$ 的极小横贯(Pelikan [1971])。因此 $\tau'(H) \geqslant r+2$。

另一方面，Bruen [1971] 证明了每个阶为 $r$ 的射影平面满足 $\tau'(H) \geqslant r+\sqrt{r-1}$。

事实上，对于阶 $r \leqslant 9$ 的射影平面，不是线的横贯 $T$ 的极小基数由下表给出：

| $r$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 7 | 13 | 21 | 31 | — | 57 | 73 |
| $\min\|T\|$ | — | 6 | 7 | 9 | — | 12 | ? |

**例 2** 秩为 $k$ 的仿射平面。一个秩为 $k$ 的仿射平面指的是：从阶为 $k+1$ 的射影平面中将一条给定的线上的点全删除所得到的子超图 $H$。$H$ 中每条边称为线，$H$ 的两条无公共点的线称为是平行的。

秩为 $k$ 的仿射平面满足下面性质：

(1) 每条线含 $k$ 个点；

(2) 每个点属于 $k+1$ 条线；

(3) 有 $k^2$ 个点，$k^2+k$ 条线；

(4) 两个不同的点有一条且只有一条公共线；

(5) 两条不同的线或没有公共点，或有一个公共点；

(6) 平行是一个等价关系，它将线集合分划成每个有 $k$ 条边的 $k+1$ 个类；

(7) 过给定的线外一点，存在一条且仅一条线与给定的线平行。

Bruen 和 Resmini [1983] 证明了 $q$ 阶仿射平面 $H$ 有 $\tau(H)\leqslant 2q-1$。Brouwer 和 Schrijver [1976] 证明了由 $q$ 元域所构成的仿射平面 $H$，有 $\tau(H)=2q-1$。最后 Jamison [1977] 证明了在 $q$ 元域上，以 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为基的向量空间上，其边为平面 $\left\{\sum_{i=1}^{n} x_ie_i \,\middle|\, \sum a_ix_i=b\right\}$ 的超图 $H$ 具有 $\tau(H)=n(q-1)+1$。这个基数是由横贯 $T=\{ke_i\,|\,k\in K, i=1,2,\cdots,n\}$ 得到，但它说明不可能得到比这更好的。

**例 3** $(n,k,\lambda)$-构形。若 $n$ 阶的 $k$-一致超图 $H$ 使得每一对顶点恰好含在 $\lambda$ 条边中，则称 $H$ 是一个 $(n,k,\lambda)$-构形。从定义易推出

(ⅰ) $H$ 是正则的，且 $\Delta(H)=\lambda\dfrac{n-1}{k-1}$；

(ⅱ) $H$ 的边数 $m(H)=\lambda\dfrac{n(n-1)}{k(k-1)}$。

一些已知的 $(n,k,\lambda)$-构形的横贯数 $\tau$ 由下表给出：

| $(n,k,\lambda)$ | (13,3,1) | (10,4,2) | (9,4,3) | (11,3,3) | (12,4,3) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\tau$ | 7 | 4 | 4 | 7 | 6 |

**定理 3** 设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是 $X$ 上的超图，且 $\tau'(H)=t$，令 $k\geqslant 1$ 是整数。若 $k<|E_1|\leqslant|E_2|\leqslant\cdots\leqslant|E_m|$，且 $X$ 中每一个 $k$ 元子集至多包含在 $H$ 的 $\lambda$ 条边中，则

$$\sum_{j=1}^{t}\binom{|E_j|-1}{k}\leqslant\lambda\binom{n-t}{k}$$

**证** 设 $T$ 是 $H$ 的极小横贯。对每个 $x\in T$，存在一条边 $E_x$ 使得 $E_x\cap T=$

$\{x\}$。由于 $x \neq y$ 时，有 $E_x \neq E_y$，故 $H' = (E_x | x \in T)$ 是 $H$ 的一个部分超图。

用两种不同的方法对$(A, E)$计数，其中 $E \in H'$，$A$ 是 $E \cap (X - T)$ 中 $k$- 元子集，则

$$(1) \sum_{x \in T} \binom{|E_x - \{x\}|}{k} = \sum_{\substack{A \subset X - T \\ |A| = k}} |\{E_x | E_x \supset A\}|$$

从而有

$$\sum_{j=1}^{t} \binom{|E_j| - 1}{k} \leqslant \lambda \binom{n - t}{k}$$

**推论 1** $H$ 是 $n$ 阶无环超图，$s = \min|E_i|$，$\Delta = \Delta(H)$，则 $\tau'(H) \leqslant \left[\frac{n\Delta}{\Delta + s - 1}\right]$。此外，当 $s = 2$ 时，这个界是最好的。

事实上，在定理 3 中取 $k = 1$，且令 $\tau'(H) = t$，则有

$$t\binom{s - 1}{1} \leqslant \Delta \binom{n - t}{1}$$

故有 $\tau'(H) = t \leqslant \frac{n\Delta}{\Delta + s - 1}$。对 $s = 2$，由 Turan 图知等号成立。

**推论 2** $H$ 是 $n$ 阶线性超图，且 $\min|E_i| = s > 2$，则

$$\tau'(H) \leqslant n + \frac{1}{2}(s^2 - 3s + 1) - \frac{1}{2}\sqrt{4n(s^2 - 3s + 2) + (s^2 - 3s + 1)^2}$$

**证** 在定理 3 中取 $k = 2$，$\lambda = 1$，有

$$t\binom{s - 1}{2} \leqslant \binom{n - t}{2}$$

也就是

$$t^2 - t(s^2 - 3s + 2n + 1) + (n^2 - n) \geqslant 0$$

上式中二次方程的两个根为 $t'$ 和$t''$。注意到 $t' < n < t''$。由于 $\tau'(H) \leqslant n$，因此，我们有 $\tau'(H) \leqslant t'$。故结论成立。

**推论 3**(Erdös, Hajnal [1966]) $H$ 是 $n$ 阶 3- 一致线性超图，则

$$\tau(H) \leqslant n - \sqrt{2n + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$$

在推论 2 中取 $s = 3$ 即可得此结论。

**定理 4**(Meyer[1975]) 设 $H$ 是一个超图，且 $\min|E_i| = s > 1$。又设 $X$ 的顶点按下述方式标号

$$d_H(x_1) \leqslant d_H(x_2) \leqslant \cdots \leqslant d_H(x_n)$$

则 $\tau'(H) = t$ 满足

$$\sum_{i=1}^{t} [d_H(x_i) + s - 1] \leqslant \sum_{i=1}^{n} d_H(x_i)$$

**证** 应用定理 3 证明中的公式(1)，令 $k = 1$，可得

(1′) $\sum_{x\in T}(|E_x-\{x\}|)\leqslant\sum_{x\in X-T}d_H(x)$

因此,$t(s-1)\leqslant\sum_{i=t+1}^{n}d_H(x_i)$。易证所需的不等式。

注意到定理 4 推广了推论 1,在图的情况下,它推广了 Zarankiewicz 的定理(Graphs,第 13 章)。

(Hansen, Lorea [1976] 用归纳法给了另一个独立的证明)

**定理 5**(Berge, Duchet [1975]) $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是 $X$ 上的超图。令 $\bar{E}_j=X-E_j$,则 $\tau'(H)\leqslant k$ 当且仅当超图 $\bar{H}=(\bar{E}_1,\bar{E}_2,\cdots,\bar{E}_m)$ 是 $k$- 保形的。

**证** 为了证明 $\bar{H}$ 是 $k$- 保形的,也就是证明对每个 $A\subset X$,下面两条等价:

$(C_k)$ $(\forall S\subset A,|S|\leqslant k)(\exists\bar{E}_j\in\bar{H}):\bar{E}_j\supset S$

$(C)$ $(\exists\bar{E}_j\in\bar{H}):\bar{E}_j\supset A$

下面考虑这两个条件的否命题,即

$(\bar{C}_k)$ $(\exists S\subset A,|S|\leqslant k)(\forall E_j\in H):E_j\cap S\neq\varnothing$

$(\bar{C})$ $(\forall E_j\in H):E_j\cap A\neq\varnothing$

为了证明 $\bar{H}$ 是 $k$- 保形的,只需证明 $(\bar{C}_k)$ 与 $(\bar{C})$ 等价。另一方面,$\tau'(H)\leqslant k$ 等价于每一个横贯 $A$ 包含一横贯 $S$ 满足 $|S|\leqslant k$;也就是 $(\bar{C})\Rightarrow(\bar{C}_k)$。

由于 $(\bar{C}_k)\Rightarrow(\bar{C})$ 总是成立的,所以 $\tau'(H)\leqslant k$ 当且仅当 $(\bar{C}_k)$ 等价于 $(\bar{C})$,即 $\tau'(H)\leqslant k$ 当且仅当 $\bar{H}$ 是 $k$- 保形超图。

**推论 1** 设 $H$ 是 $X$ 上的简单超图,$k\geqslant 2$ 是整数,则 $\tau'(H)\leqslant k$ 当且仅当对每一个有 $k+1$ 条边的部分超图 $H'\subset H$,存在一条边 $E\in H$ 含在集合 $\{x\mid d_{H'}(x)\geqslant 1\}$ 中。

**证** 由第 1 章的定理 15 可知,$\bar{H}$ 是 $k$- 保形的等价于对每一个有 $k+1$ 条边的部分超图 $\bar{H}'\subset\bar{H}$,集合

$$A=\{x\mid x\in X,d_{\bar{H}'}(x)\geqslant k\}$$

含在 $\bar{H}$ 的一条边 $\bar{E}$ 中。由于

$$d_{\bar{H}'}(x)=|H'|-d_{H'}(x)=k+1-d_{H'}(x)$$

这条件也等价于

$$\{x\mid x\in X,d_{H'}(x)\leqslant 1\}=A\subset\bar{E}$$

由此可得结果。

**推论 2** $H$ 是 $\tau(H)=t\geqslant 2$ 的简单超图,则超图 $T_tH$ 是一致的充要条件是:对每个有 $t+1$ 条边的部分超图 $H'\subset H$,存在一条边 $E\in H$ 含在 $\{x\mid x\in X,d_{H'}(x)>1\}$ 中。

## 3 τ- 临界超图

$H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是一个超图,若在 $H$ 中任意删除一条边其横贯数减少,

即

$$\tau(H-E_j)<\tau(H) \qquad (j=1,2,\cdots,m)$$

则称 $H$ 是 $\tau$- 临界的。由于不可能有 $\tau(H-E_j)<\tau(H)-1$,因此,若 $\tau(H)=t+1$,则 $H$ 是 $\tau$- 临界当且仅当对每条边 $E\in H,\tau(H-E)=t$。

**例 1** 超图 $K_{t+r}^r$ 是 $t$- 临界的,因为 $\tau(K_{t+r}^r)=t+1$,若 $E$ 是 $K_{t+r}^r$ 的一条边,则超图 $K_{t+r}^r-E$ 有一个 $t$- 横贯 $X-E$。

**例 2** 令 $\mathscr{A}$ 是 $t+r-1$ 元集 $X$ 上所有 $(r-1)$- 元子集组成的集簇。对每个 $A\in\mathscr{A}$,取一个与之对应的顶点 $y_A$,它们构成基数为 $\binom{t+r-1}{r-1}$ 的集合 $Y$。考虑在 $X\cup Y$ 上超图 $H=(A\cup\{y_A\}\mid A\in\mathscr{A})$。显然,$\tau(H)=t+1$。由于 $H-(A\cup\{y_A\})$ 有 $t$- 横贯 $X-A$,因此超图 $H$ 是 $\tau$- 临界的。

对于 $r=2$,$\tau$- 临界的概念是 Zykov 在 1949 年提出来的,而系统的研究始于 1961 年 Erdös 和 Gallai 的论文,证明了无孤立点的 $\tau$- 临界图满足 $2\tau(G)-n(G)>0$。图 4 和图 5 给出了两个 $\tau$- 临界图的例子。

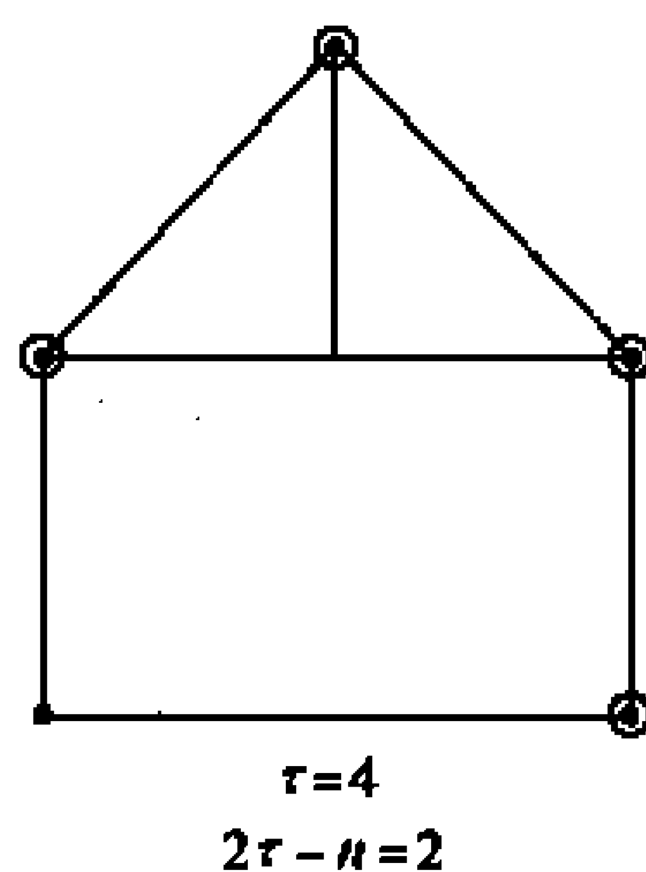



图 4

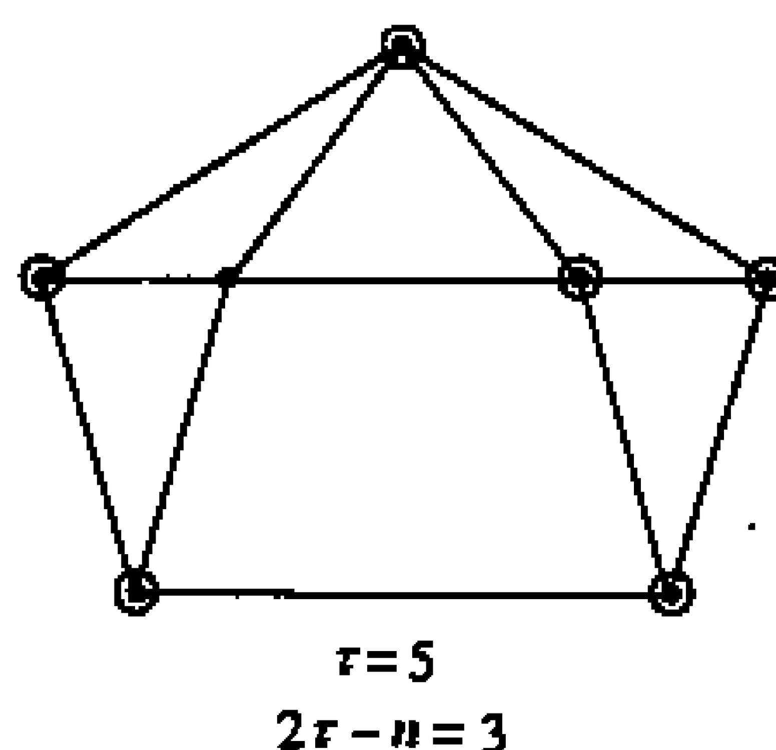



图 5

**性质 1** 每一个 $\tau$- 临界图是简单的。

假设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是 $\tau$- 临界但不是简单的,则存在两个不同的下标 $i$ 和 $j$,使 $E_i\subset E_j$。同时 $H-E_j$ 中有 $(\tau(H)-1)$- 横贯,而与 $E_i$ 相交的横贯必定与 $E_j$ 相交。因此 $\tau(H)\leqslant\tau(H)-1$,矛盾。

**性质 2** 设 $H$ 是 $\tau(H)=t+1$ 的超图,则必存在一个 $\tau$- 临界的部分超图 $H'\subset H$,满足 $\tau(H')=t+1$。

事实上,在不改变横贯数的前提之下,将 $H$ 中的一些边逐次除去,直到不能去边为止,所得部分超图 $H'$ 即为所求。

$x$ 是超图 $H$ 中的一个顶点,称 $x$ 为临界的,如果

(1) $\tau(H-H(x))<\tau(H)$

注意到(1) 等价于下面的(2):

(2) $\tau(H-H(x))=\tau(H)-1$

事实上，若(1)成立，超图 $H-H(x)=H_1$ 有一个 $(\tau(H)-1)$- 横贯 $T_1$，则 $T_1\cup\{x\}$ 是 $H$ 的横贯，它的基数是 $\tau(H)$，所以 $T_1$ 是 $H-H(x)$ 中的最小横贯。故(2)成立。

反之，若(2)成立，令 $T$ 是 $H$ 的含 $x$ 的最小横贯，则 $T-\{x\}$ 是 $H-H(x)$ 的 $(\tau(H)-1)$- 横贯。故(1)成立。

**性质 3** $\tau$- 临界超图的每一个点是临界的。

设 $H$ 是一个 $\tau$- 临界超图，$x$ 是 $H$ 中任一顶点。由于 $x$ 含在一条边中，不妨设为 $E$，则有

$$\tau(H-H(x))\leqslant\tau(H-E)<\tau(H)$$

因此 $x$ 是临界的。

**例 1** 考虑一个连通无割边的简单图 $G=(X,E)$。令 $H$ 是以 $G$ 的边为顶点，$G$ 中的圈为边所构成的超图。由于 $G$ 没有割边，$G$ 中的每条边总含在某个圈中，因此 $H$ 是 $E$ 上的简单超图。

对每个 $e_0\in E$，存在 $G$ 的一棵不含 $e_0$ 的生成树 $F$，则有 $\tau(H)=m(G)-n(G)+1$，且 $G$ 的每棵余树是 $H$ 的一个横贯，因此 $E-F$ 是 $H$ 中含 $e_0$ 的一个最小横贯，故 $H$ 的每个点是临界的。

**例 2** 关于强连通有向图 $G_0$ 也有类似的结果。设 $H$ 是以 $G_0$ 的弧为顶点，有向圈为边所构成的超图。例如，图 6 所示的 Möbius 梯 $G$。其 $H$ 的边是：

$$E_1=\{ab,bd,dc,ca\}$$
$$E_2=\{ab,bf,fe,ea\}$$
$$E_3=\{ab,bf,fe,ed,dc,ca\}$$
$$E_4=\{ab,bd,dc,cf,fe,ea\}$$
$$E_5=\{cf,fe,ed,dc\}$$

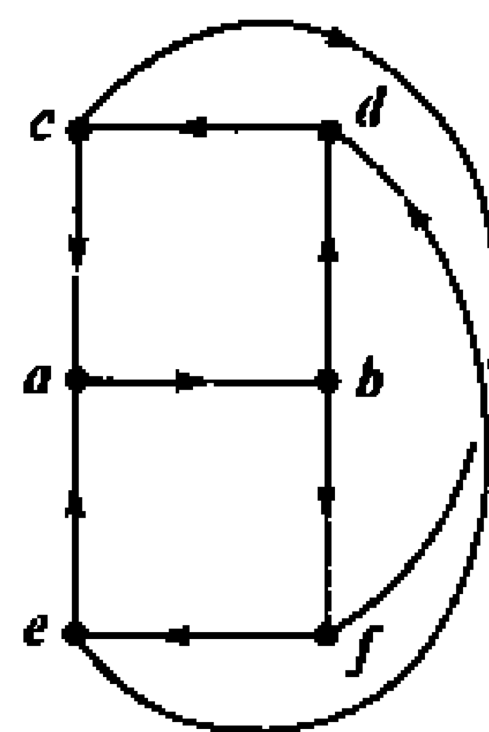



图 6

易证 $\tau(H)=2$ 且 $H$ 的每个点属于一个 2- 横贯。故 $H$ 的每个点是临界的。作为练习，读者可以证明与这例相应的性质 3。

**定理 6**(Tuza [1984]) 设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是 $\tau$- 临界超图，$\tau(H)=t+1$，则

$$\sum_{j=1}^{m}\binom{|E_j|+t}{t}^{-1}\leqslant 1$$

**证** 对每条边 $E_j$，存在 $T_j\in T_t(H-E_j)$ 且 $|T_j|=t$。显然，$E_j\cap T_i=\varnothing$ 当且仅当 $i=j$。于是由第 1 章中的定理 6 可得

$$\sum_{j=1}^{m}\binom{|E_j|+|T_j|}{|E_j|}^{-1}\leqslant 1$$

这就是所要的不等式。

**推论 1**(Bollobás [1965], Jaeger, Payan [1971]) 设 $H$ 是秩为 $r$ 的 $\tau$- 临界超

图，$\tau(H) = t + 1$，则

$$m(H) \leqslant \binom{r+t}{t}$$

此外当 $H = K_{t+r}^{r}$ 时，这个上界可达。

**证**　令 $E \in H$，由于 $|E| \leqslant r$，有

$$\binom{|E|+t}{t} \leqslant \binom{r+t}{t}$$

故有

$$m(H)\binom{r+t}{t}^{-1} \leqslant \sum_{E\in H}\binom{|E|+t}{t}^{-1} \leqslant 1$$

这就是所要的不等式。

当 $H = K_{t+r}^{r}$ 时，易证等号成立。

**推论 2**（Erdös, Hajnal 和 Moore 的定理）　设 $G$ 是 $n$ 阶简单图，$\alpha(G) = k$ 且对每条边 $e_j$，$\alpha(G - e_j) = k + 1$，则

$$m(G) \leqslant \binom{n-k+1}{2}$$

由于 $G$ 的每一个极大独立集是 $G$ 的极小横贯的补，因此 $\tau(G) = n - k$，且对每条边 $e_j$，$\tau(G - e_j) = n - k - 1$。再由推论 1 可得不等式。

下面的结论是 Gyarfas, Lehel, Tuza [1980] 的一个定理，它推广了 Hajnal 的定理（Graphs，第 13 章，定理 8）。

**定理 7**　设 $H$ 是 $X$ 上的 $\tau$- 临界超图且下秩 $s(H) \geqslant 2$①，$\tau(H) = t + 1$。令

$$\mathscr{A} = \{A \mid A \subset X, A \notin H \text{ 且存在某个 } x \in X, \text{使 } A \cup \{x\} \in H\}$$

对 $x \in X$ 和 $Y \subset X$，令

$$\Gamma x = \{A \mid A \in \mathscr{A}, A \cup \{x\} \in H\}$$

$$\Gamma Y = \bigcup_{x\in Y} \Gamma x$$

则对任意的 $E \in H$，有 $|S \cap E| \leqslant 1$ 的 $S \subset X$ 满足 $|\Gamma S| \geqslant |S|$。

(*) **证**　令

$$\mathscr{S} = \{S \mid S \subset X, \forall E \in H \text{ 有 } |E \cap S| \leqslant 1\}$$

用反证法。若存在某个 $S \in \mathscr{S}$，使得 $|\Gamma S| < |S|$，并令 $S$ 是具有这一性质的一个极小集。由 König-Hall 定理（Graphs，第 7 章，定理 5），二部图 $G = (X, \mathscr{A}; \Gamma)$ 不存在 $S$ 到 $\mathscr{A}$ 的匹配。但对每一个 $y \in S$，存在一个 $S - \{y\}$ 到 $\mathscr{A}$ 的匹配。由于在 $G$ 中 $X$ 的每个顶点的度至少是 1，且 $|\Gamma S| < |S|$，故存在 $A_0 \in \Gamma S$ 和两个不同顶点 $y_1, y_2 \in S$，使得

$$A_0 \cup \{y_1\} = E_1 \in H \quad (y_1 \in S)$$

① 原文没有这一条件。

$$A_0 \cup \{y_2\} = E_2 \in H \qquad (y_2 \in S)$$

由于 $\tau(H - E_1) = t$，令 $T_1$ 是超图 $H - E_1$ 的一个 $t$- 横贯。又因 $T_1 \cap E_1 = \emptyset$，故有 $y_1 \notin T_1$。其次

$$T_1 \cap A \neq \emptyset \qquad (A \in \Gamma y_1, A \neq A_0)$$

由 $S$ 的极小性，对每个 $Y \subset S - \{y_1\}$，有 $|\Gamma Y| \geq |Y|$。因此存在 $S - \{y_1\}$ 到 $\Gamma S$ 的一个匹配，这个匹配建立了 $y \in S - \{y_1\}$ 和 $A(y) \in \Gamma y$ 之间的一个对应。由于 $|\Gamma S| = |S| - 1$，所以每个 $A \in \Gamma S$ 是某个 $y \in S - \{y_1\}$ 的象。

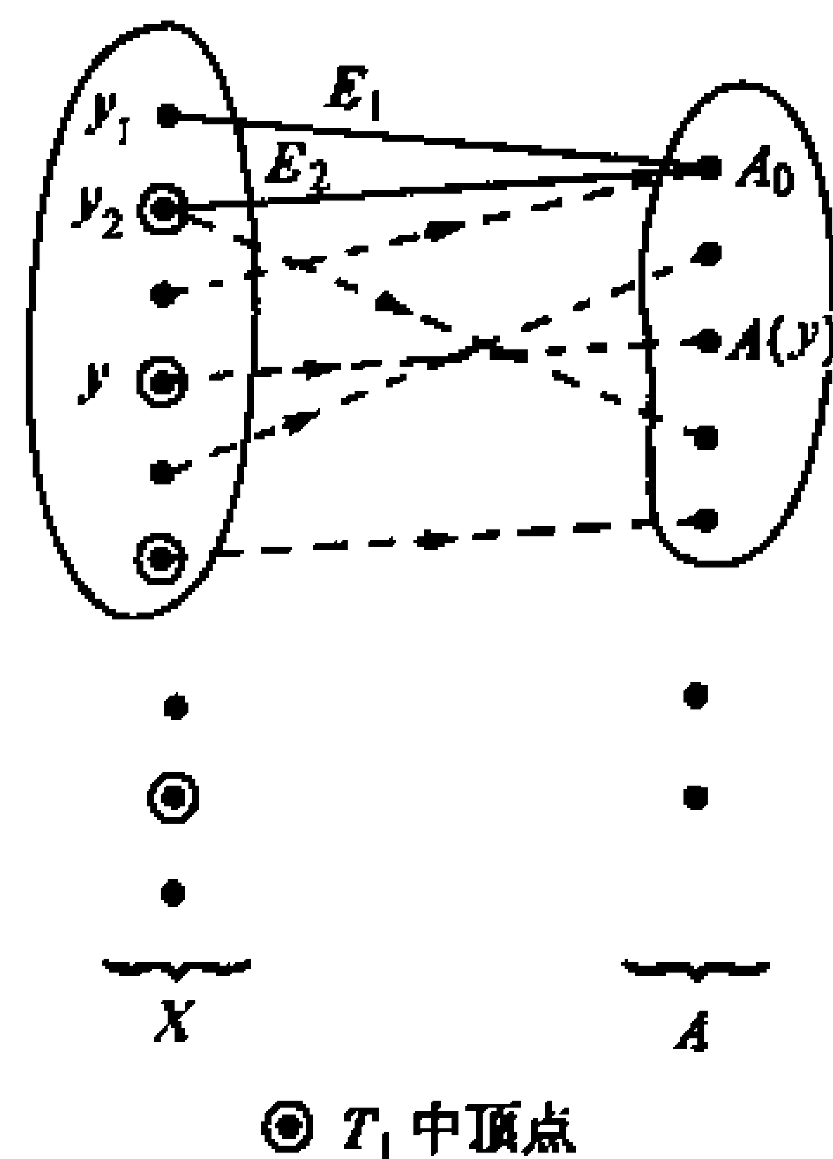


图 7

现把 $T_1$ 中凡属于 $S - \{y_1\}$ 的点 $y$ 均换成 $A(y)$ 中异于 $y$ 的点，所得集合记为 $T_2$。

注意到若 $A \in \Gamma S$ 且满足 $T_1 \cap A = \emptyset$，则在 $G$ 中，$S - \{y_1\}$ 中与 $A$ 连接的点 $y$ 属于 $T_1$，所以

$$T_2 \cap A \neq \emptyset \qquad (A \in \Gamma S)$$

由于 $S \in \mathscr{S}$，故有

$$T_2 \cap E \neq \emptyset \qquad (E \in H, E \cap S \neq \emptyset)$$

所以 $T_2$ 是 $H$ 的一个横贯，且 $|T_2| \leq |T_1| = t$，矛盾。

# 4 König 性质

超图 $H$ 的两两不相交的边集称为**匹配**，用 $\nu(H)$ 表示 $H$ 的最大匹配中的边数。

一个匹配也可以定义为 $\Delta(H_0) = 1$ 的一个部分超图 $H_0$。

易知，对每一个横贯 $T$ 和每一个匹配 $H_0$，

$$|T \cap E| \geq 1 \qquad (E \in H_0)$$

因此 $|H_0| \leq |T|$，故

$$\nu(H) = \max|H_0| \leq \tau(H)$$

$\nu(H) = \tau(H)$ 的超图 $H$ 称为具有 **König 性质**。

超图 $H$ 的一个覆盖所有顶点的边集合称为 $H$ 的一个**覆盖**，也就是一个 $\delta(H_1) = \min\limits_{x \in X} d_{H_1}(x) \geq 1$ 的部分超图 $H_1$。记

$$\rho(H) = \min|H_1|$$

最后，若 $S \subset X$ 满足：对任意 $E \in H$ 有 $|S \cap E| \leq 1$，称 $S$ 为 $H$ 的**强独立集**，记

$$\bar{\alpha}(H) = \max|S|$$

由定义直接可推得 $\rho(H) = \tau(H^*)$，$\bar{\alpha}(H) = \nu(H^*)$。由于这些关系，把满足

$\rho(H)=\bar{\alpha}(H)$ 的超图 $H$ 称为具有**对偶 König 性质**。

**例 1 $r$- 部完全超图**。设 $n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_r$，则超图 $K^r_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$ 的 $\tau=n_1$，$\nu=n_1$，故它具有 König 性质。又由于 $\rho=n_r$，$\bar{\alpha}=n_r$，故它也具有对偶 König 性质。

**例 2 半凸多米诺骨牌**。多米诺骨牌 $P$ 是平面上一些依次排列的单位正方形组成的有限集合，就像在一棋盘上挖去一些单位正方形所成的图形。每一个多米诺骨牌 $P$ 对应于一个超图，其顶点为 $P$ 的单位正方形，含在 $P$ 内的极大矩形作为边。

易证超图 $P$ 具有 Helly 性质且是保形的。

此外，若平面上每一条水平线与 $P$ 的交构成一个区间，则称 $P$ 是"半凸"的。这种超图 $P$ 具有 König 性质(Berge, Chen, Chvátal, Seow [1981])，也具有对偶 König 性质(Györi [1984])。图 8 给出了使 $\nu(P)\neq\tau(P)$ 的最小的多米诺骨牌。

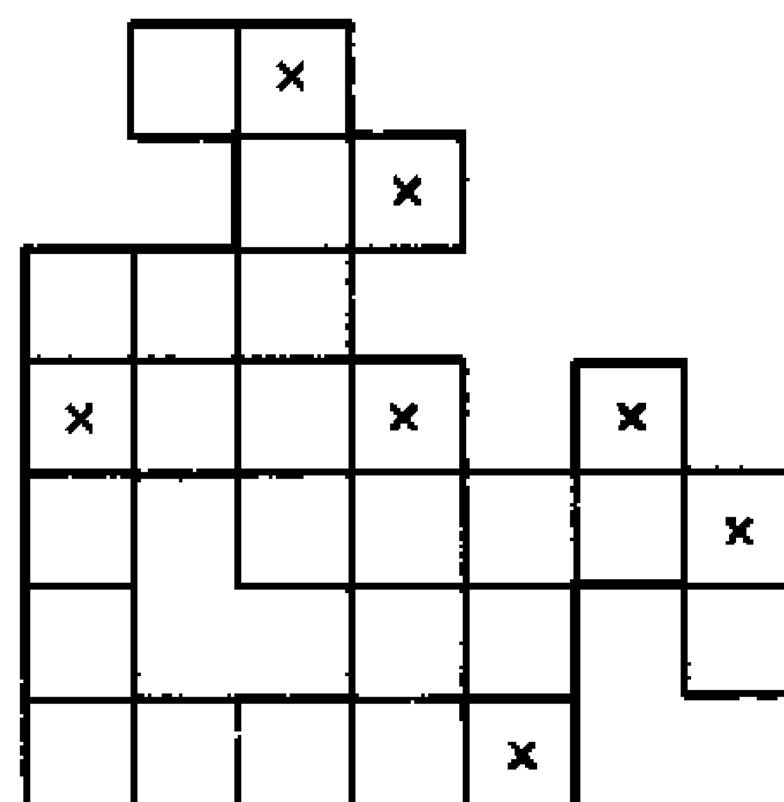


图 8 $\nu=6$, $\tau=8$ 的多米诺骨牌

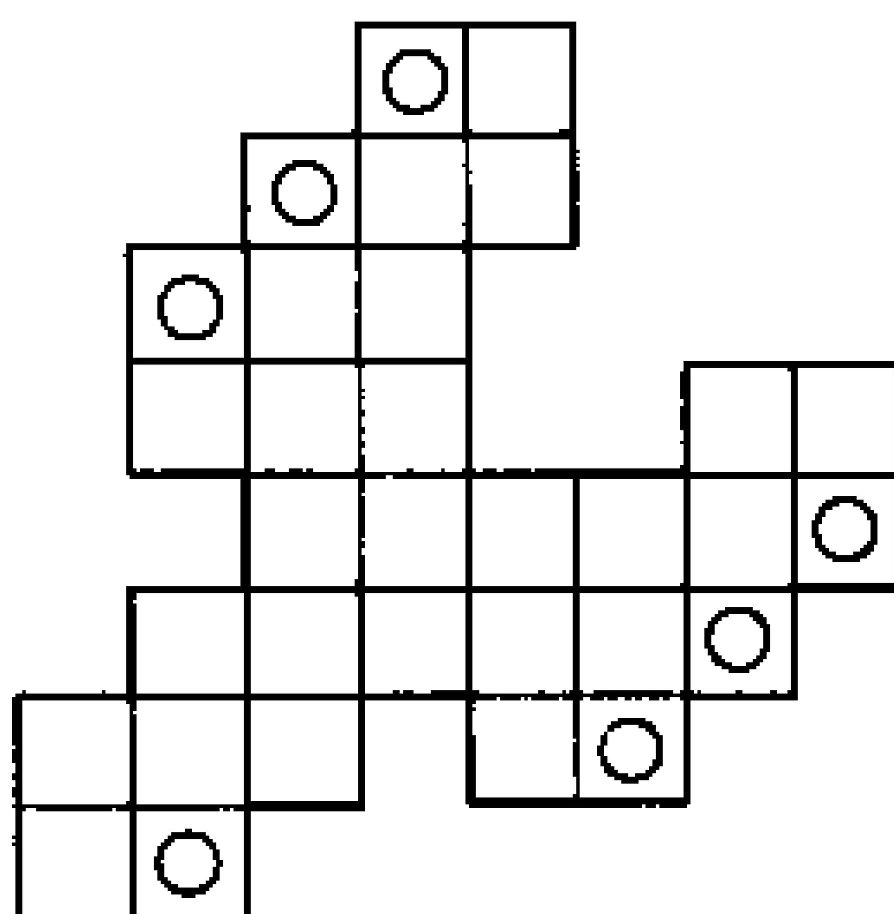


图 9 $\rho=8$, $\bar{\alpha}=7$ 的多米诺骨牌

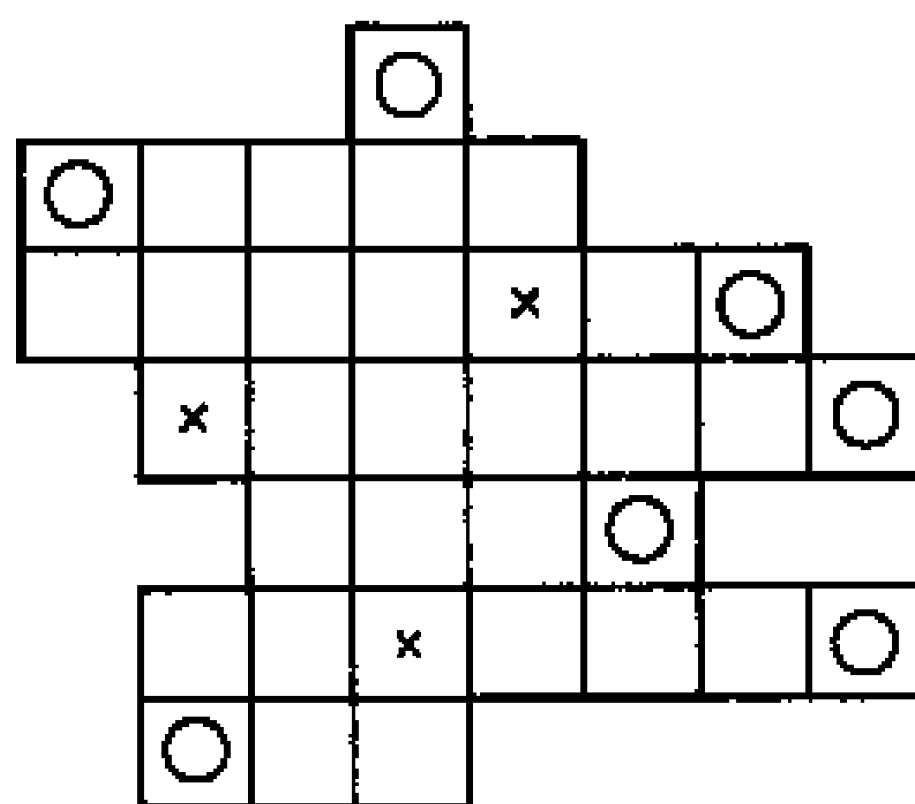


图 10 $\nu=\tau=3$, $\rho=\bar{\alpha}=7$ 的半凸多米诺骨牌

**例 3 铺砌砖头**。考虑整数 $a\leqslant b$，$p\leqslant q$，对 $p\times q$ 的矩形棋盘，用 $a\times b$ 的砖头铺这棋盘。问最多能够不重叠地放置多少块砖头于棋盘上？

考虑这样的一个超图 $H$：$p\times q$ 的矩形中单位正方形作为顶点，所有 $a\times b$ 的矩形作为边。则上面所提问题的答案是 $\nu(H)$。Brualdi 和 Foregger [1974] 证明了对任一 $(p,q)$，超图 $H$ 具有 König 性质的充要条件是 $a|b$。例如，图 11 给出了 $a=2$，$b=3$，$p=9$，$q=6$ 的情况，

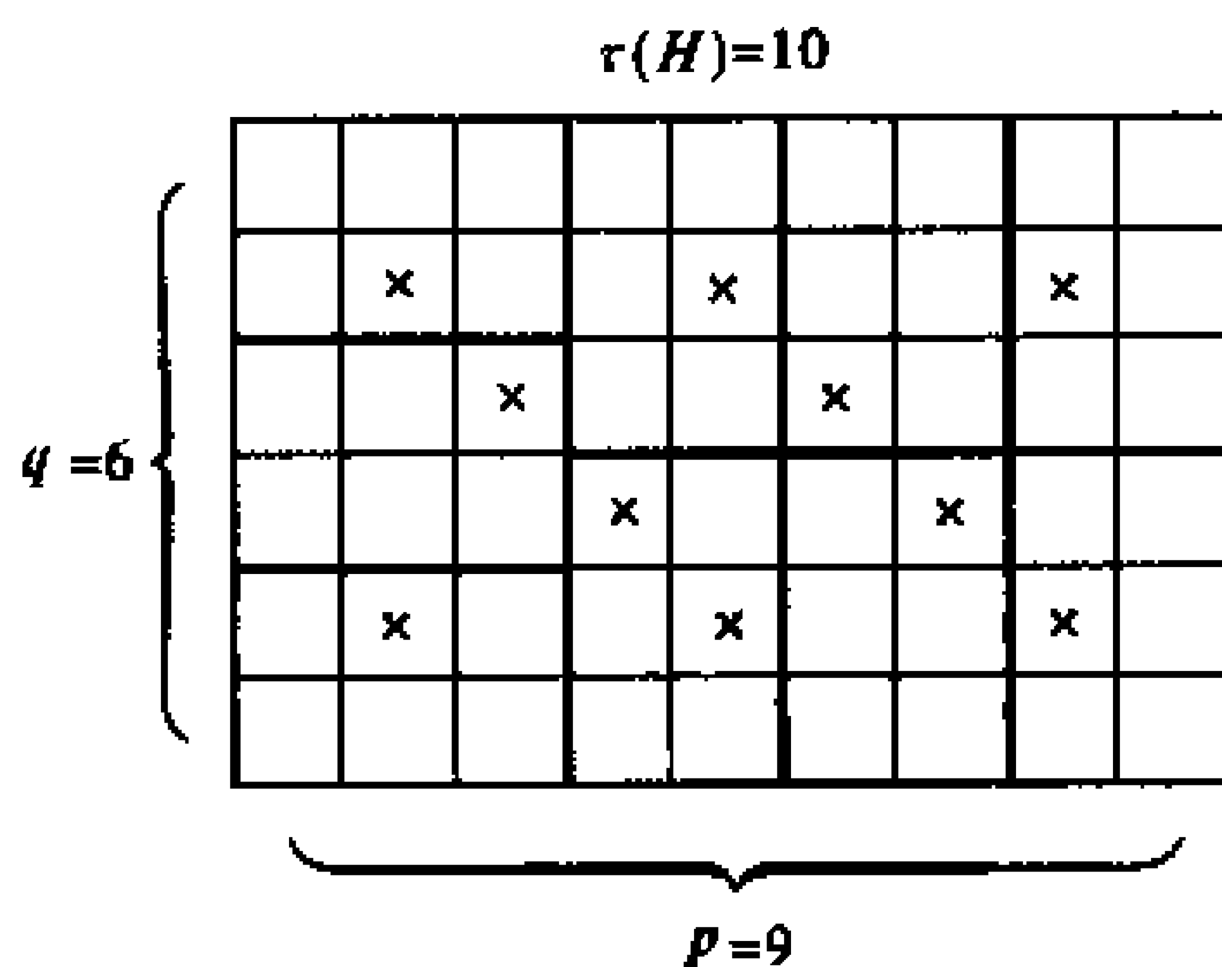
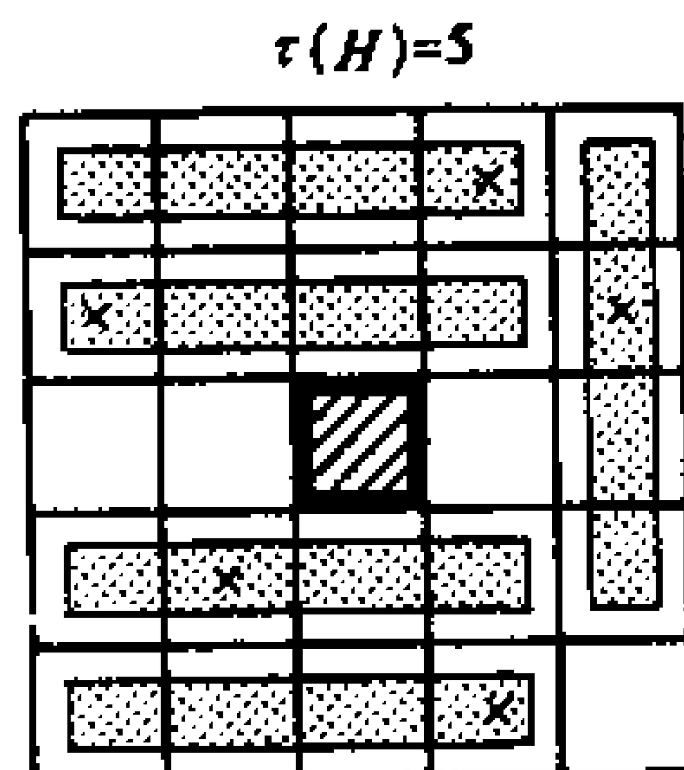



图 11 有"×"的小方块构成 $H$ 的一个最优横贯

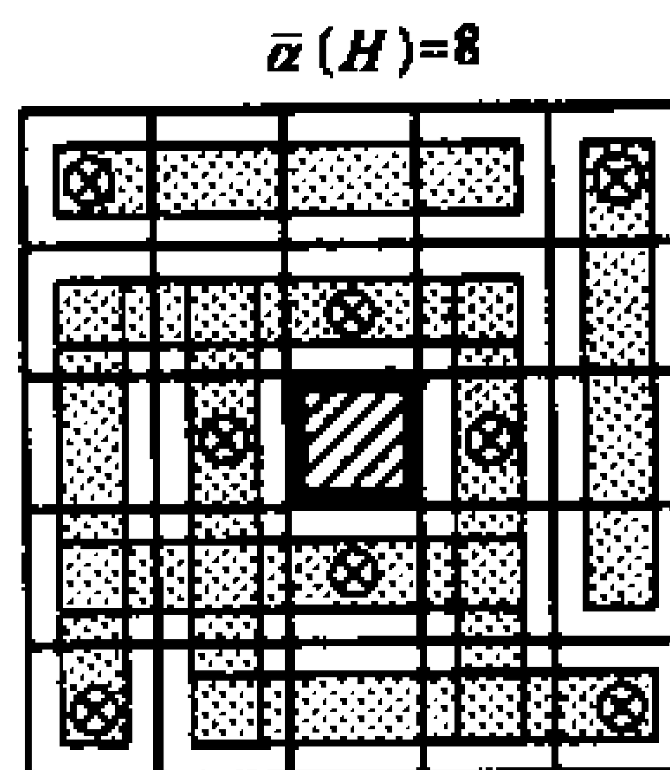
所构造的超图 $H$ 不具有 König 性质，其中 $\nu(H)=9,\tau(H)=10$。

如果用 $a\times b$ 的砖头去铺砌一个剪残棋盘，则在一般情况下，它既不具有 König 性质，也不具有对偶 König 性质。然而，读者容易证明，图 12，图 13 所示的含有 24 个小方块构成的剪残棋盘，对 $1\times 4$ 的砖头来说具有以上两条性质。




有"×"的小方块构成 $H$ 的一个横贯，因而相应的匹配是最优的

图 12




有"⊗"的方块构成 $H$ 的一个强独立集，因而相应的覆盖是最优的

图 13

**例 4　树的子树的超图。**设 $G$ 是顶点集为 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 的树，$H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是 $X$ 的一个子集簇，使每个 $E_i$ 的诱导子图为 $G$ 的子树。已知 $H$ 具有 Helly 性质，从完美图理论知，$H$ 也具有 König 性质。

对 $\tau(H)=t$ 进行归纳来证明 $\nu=\tau$。如果 $t=1$，显然 $\nu=\tau$。现在我们假设 $t\geqslant 2$ 且 $T=\{x_1,x_2,\cdots,x_t\}$ 是 $H$ 的一个最优横贯。

令 $S\subset X$ 是使子树 $G[S]$ 含有 $T$ 的最小集合。进而，选择 $T$ 使 $|S|$ 最小。树 $G[S]$ 的悬挂点 $x_i$ 也必定属于 $T$。

由于 $T$ 是 $H$ 的一个最小横贯，部分超图 $H_1=(E\,|\,E\in H,E\cap T=\{x_1\})$ 是非空的，从而由 $|S|$ 的最小性，存在一条边 $E_1\in H_1$，使 $E_1\cap(S-\{x_1\})=\emptyset$。

超图 $H'=H-H(x_1)$ 有一个 $(t-1)$- 横贯，故由归纳假设 $\nu(H')=t-1$。在 $H'$ 的一个最大匹配中增加边 $E_1$ 构成 $H$ 的一个基数为 $t$ 的匹配，因此 $\nu(H)\geqslant t=\tau(H)$。从而有 $\nu(H)=\tau(H)$。

**例 5　多重二部图。**著名的 König 定理证明了多重二部图具有 König 性质和对偶 König 性质。

对于非二部图具有 König 性质的刻画由 Sterboul 给出，这一结果的证明将放在第 4 章的定理 6 里。

**例 6　区间超图。**Gallai 的定理证明了区间超图具有 König 性质。它也可由例 2 或者例 4 得到。今后，还可知道它亦具有对偶 König 性质。

**例 7　有向图的有向圈超图。**设 $G_0$ 是一个强连通有向图，令 $H$ 是以 $G_0$ 的弧为顶点，$G_0$ 的有向圈为边所构成的超图。

如果 $G_0$ 是平面图，Lucchesi 和 Younger [1978] 证明了超图 $H$ 具有 König 性

质。如果 $G_0$ 是非平面的，一般情况下超图 $H$ 不具有 König 性质。对图 6 中所示的 $G_0$，有 $\nu(H)=1$ 和 $\tau(H)=2$。Younger 猜测：若 $G_0$ 是平面的，则超图 $T_rH$ 具有 König 性质。对一个平面图 $G_0$，由 $G_0$ 最短有向圈所构成的超图记为 $H_1$，Kahn [1984] 证明了 $H_1$ 的横贯超图 $T_rH_1$ 具有 König 性质。

**定理 8**(Seymour [1982])　$H$ 是一个线性超图，有 $n(H)$ 个顶点，$m(H)$ 条边，没有重复的环，则

$$\nu(H)\geqslant\frac{m(H)}{n(H)}$$

(*) 证　设 $H$ 是一个线性超图，$m(H)=m$，$n(H)=n$。$p=p(H)=\left\lceil\frac{m}{n}\right\rceil$。于是有

(1) $p\geqslant\frac{m}{n}$

(2) $p-1<\frac{m}{n}$

下面证明 $\nu(H)\geqslant p$。对 $p=1$，结论是平凡的。因此可设 $p\geqslant 2$。下面对 $m$ 归纳来证明。

1. 对每条边 $E\in H$，可以假设至少有 $(p-2)|E|+n+1$ 条 $H$ 中的边与 $E$ 相交。

否则，超图 $H_1=(F|F\in H,F\cap E=\varnothing)$ 满足

$$m-m(H_1)<(p-2)|E|+n+1$$

因此，由 (2) 得

$$m(H_1)>n(p-1)+1-(p-2)|E|-n-1=(n-|E|)(p-2)$$

此时有

$$\frac{m(H_1)}{n(H_1)}>\frac{(n-|E|)(p-2)}{n-|E|}=p-2$$

$H_1$ 仍是线性的，由归纳假设，对 $H_1$ 有 $\nu(H_1)\geqslant p-1$。将 $E$ 加至 $H_1$ 的一个含有 $p-1$ 条边的匹配中，得到 $H$ 的一个含有 $p$ 条边的匹配。定理得证。

2. 若 $S\subset X$，$|S|\leqslant p-1$，存在一条边 $E\in H$，满足 $E\cap S=\varnothing$。

令 $x\in X$，因为 $H$ 是线性的，集合 $\{E-\{x\}\mid E\in H(x)\}$ 是两两不交的，而这些集合的并至多含有 $n-1$ 个顶点，且只可能有一个是空集，因此 $|H(x)|\leqslant n$。故 $H$ 的最大度是 $\Delta(H)\leqslant n$。

由 (2)，部分超图 $H'=(E|E\in H,E\cap S\neq\varnothing)$ 满足

$$m(H')\leqslant|S|\Delta(H)\leqslant(p-1)n<m=m(H)$$

因此，存在一条边 $E\in H-H'$ 满足 $E\cap S=\varnothing$。

3. 用下面的方法逐次定义不同的边 $F_1,F_2,\cdots,F_p$ 和不同的顶点 $x_1,x_2,\cdots,$

$x_p$:

（Ⅰ）$F_1$ 是一条基数最小的边，$x_1$ 是 $F_1$ 中使 $d_H(x)$ 为最大的顶点；

（Ⅱ）对 $i>1$，$F_i$ 是使 $F_i \cap \{x_1,x_2,\cdots,x_{i-1}\}=\varnothing$ 且基数最小的一条边（由 2. 可知，这样的边是存在的），$x_i$ 是 $F_i$ 中使 $d_H(x)$ 最大的顶点。

令

$$|F_i| = f_i$$
$$H_i = (E \mid E \in H, E \cap \{x_1,x_2,\cdots,x_i\} = \{x_i\})$$
$$H_i^0 = (E \mid E \in H_i, |E| = f_i)$$

注意到 $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots \leqslant f_p$ 和 $F_i \in H_i^0$，于是有：

(3) $|H_i^0| \geqslant f_i|H_i| - n + 1 + \sum_{j\in J_i}(f_j - 1)$

这里 $J_i = \{j \mid 1 \leqslant j < i, x_i \in \bigcup_{E\in H_j} E\}$。

注意到若 $j \in J_i$，则存在唯一的边 $E \in H_j$ 满足 $x_i \in E$，且 $E$ 至少有 $f_j$ 个顶点。于是

$$n - 1 \geqslant \sum_{x_i\in E}(|E| - 1) = \sum_{E\in H_i}(|E| - 1) + \sum_{j<i}\sum_{\substack{E\in H_j\\ x_i\in E}}(|E| - 1)$$
$$\geqslant \sum_{E\in H_i} f_i - \sum_{E\in H_i^0} 1 + \sum_{j\in J_i}(f_j - 1)$$
$$= f_i|H_i| - |H_i^0| + \sum_{j\in J_i}(f_j - 1)$$

故(3)成立。

4. 下面证明：

(4) $f_i|H_i| - n \geqslant f_i(p - 1 - |J_i|)$

由 1.，$H$ 中与 $F_i$ 相交的边数至少是 $(p-2)f_i + n + 1$。对于 $x \in F_i$，有

$$|H(x)| \leqslant |H(x_i)|$$

于是

$$(p-2)f_i + n + 1 \leqslant f_i(|H_i| + |J_i| - 1) + 1$$

由此可得(4)式。

5. 下面证明：

(5) $|H_i^0| > p - i + \sum_{j<i}(f_j - 1)$

由(3)和(4)可得

$$|H_i^0| \geqslant 1 + f_i(p - 1 - |J_i|) + \sum_{j\in J_i}(f_j - 1)$$
$$= 1 + f_i(p - 1 - |J_i|) - \sum_{\substack{j<i\\ j\notin J_i}}(f_j - 1) + \sum_{j<i}(f_j - 1)$$

此外，

$$f_i(p-1-|J_i|)-\sum_{\substack{j<i\\ j\notin J_i}}(f_j-1)\geqslant f_i(p-1-|J_i|)-\sum_{\substack{j<i\\ j\notin J_i}}f_j$$
$$\geqslant f_i(p-1-|J_i|)-f_i(i-1-|J_i|)$$
$$=f_i(p-i)\geqslant p-i$$

由此可得(5)式。

6. 下面逐次定义边序列 $E_1,E_2,\cdots,E_p$。若 $E_1,E_2,\cdots,E_{i-1}$ 已被定义，取 $E_i\in H_i^0$ 使得 $E_i\cap Z_i=\varnothing$，这里

$$Z_i=\{x_1,x_2,\cdots,x_{i-1}\}\cup\bigcup_{j<i}(E_j-\{x_j\})$$

事实上，由于集合 $(E-\{x_i\}\mid E\in H_i^0)$ 两两不相交，又 $H_i^0$ 中不含 $\{x_1,x_2,\cdots,x_i\}$ 中的点，$H_i^0$ 中至多有 $1+|Z_i|-(i-1)$ 条边不能取，因此(5)至少有一条边与 $Z_i$ 不相交。

注意到 $E_i\in H_i^0\subset H_i$，故有 $x_j\notin E_i$，又因 $(E_j-\{x_j\})\cap E_i\subset Z_i\cap E_i=\varnothing$，从而对任一边 $E_j(j<i)$ 与 $E_i$ 不相交。

因此 $(E_1,E_2,\cdots,E_p)$ 是一个匹配，所以 $\nu(H)\geqslant p$。

**推论**(De Bruijn 和 Erdös 的定理由 Ryser [1970] 证明)　设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是 $X$ 上的无重边的 $n$ 阶超图，满足 $|E_i\cap E_j|=1\ (i\neq j)$，则 $m\leqslant n$。此外，若 $m=n$，则下列情况之一成立：

(ⅰ) $H$ 是秩为 $r\geqslant 3$ 的射影平面

(ⅱ) $H=(\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\cdots,\{1,n\}),n\geqslant 1$

(ⅲ) $H=(\{1,2\},\{1,3\},\cdots,\{1,n\},\{2,3,\cdots,n\}),n\geqslant 3$

由定理 8 可得 $\nu(H)=1\geqslant\frac{m}{n}$，故 $m\leqslant n$ 成立。

利用上述结果，Seymour 还证明了若 $H$ 是线性超图且满足 $\nu(H)=\frac{m}{n}$，则(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)，(ⅳ)之一成立，这里的(ⅳ)为：

(ⅳ) $H=K_n,n\geqslant 5$ 为奇数

## 习　题　2

1. (§2)　若超图 $H$ 具有 Helly 性质，令

$$H_i=(E\mid E\in H,E\subset X-E_i)$$

证明：$\tau(H)\leqslant\max_i m(H_i)$。

2. (§2)　设 $H$ 是最大度 $\Delta=2$ 的 $r$- 一致超图，则 $\tau(H)$ 的上界由 Sterboul [1970] 给出：

若 $r$ 是偶数，则上界是 $\left[\frac{2}{3}\left[\frac{2n}{r}\right]\right]$；

若 $r$ 是奇数，则上界是 $\left[\frac{4n}{3r+1}\right]$①；

试构造超图使其上界可达。

3.(§2) 若 $H$ 是 3- 一致 3 正则超图，则

$$\tau(H) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] \qquad \text{(Henderson, Dean [1974])}$$

举例说明这上界是最好的可能。

4.(§2) 设 $H$ 是 $X$ 上无环超图。对每个 $Y \subset X$，定义

$$H|Y = (E_i | E_i \in H, E_i \subset Y)$$

若 $H$ 中没有边，令 $\tau(H) = 0$，假设

$$\tau(H|Y) \leqslant \frac{|Y|}{2} \qquad (Y \subset X)$$

证明：对每个极小横贯② $T = \{x_1, x_2, \cdots, x_t\}$，在 $S = X - T$ 中存在相异元素 $y_1$、$y_2, \cdots, y_t$，使得 $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \cdots, [x_t, y_t]$ 是图 $[H]_2$ 中的边(Lehel [1982])。

提示：考虑由 $[H]_2$ 中的边构成的二部图 $G = (T, S; \Gamma)$。部分超图 $H_1 = (E_i | E_i \in H, E_i \subset A \cup \Gamma_G A)$ 有一个横贯 $T_1$ 满足

$$|T_1| \leqslant \frac{1}{2} |A \cup \Gamma_G A|$$

由 $T_0 = T_1 \cup (T - A)$ 是 $H$ 的一个横贯和 $|T_0| \geqslant |T|$ 可推得 $|\Gamma_G A| \geqslant |A|$，从而可得结论。

5.(§4) 设 $P$ 是由多米诺骨牌所定义的超图(见 §4 中例 2)。证明：

(1) $P$ 是保形的；

(2) $P$ 中存在度为 1 的顶点；

(3) 存在相异的顶点 $x_1, x_2, \cdots, x_m$，使 $x_i \in E_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$。

6.(§4) 设 $P$ 是半凸多米诺骨牌所定义的超图，证明：存在 $S \subset X$ 是一个横贯且也是强独立集。

7.(§4) 用 Seymour 的结果证明“友谊定理(Erdös)”：若在 $n$ 人集合中，任意两人恰好有一个共同的朋友，则他们中有一个是所有其他人的朋友。

---

① 查 Sterboul [1970] 文献，此情况上界仅为 $\left[\frac{4n}{3r+1}\right]$。

② 原题此处误写成最大横贯。

# 参 考 文 献


Berge C., C.C. Chen, V. Chvátal, and C.S. Seow, Combinatorial properties of polyominoes, *Combinatorica* 1. (3) 1981, 217 ~ 224.

Berge C., and P. Duchet, Une généralisation du théorème de Gilmore, *Cahier du C.E.R.O.*, 17, 1975, 111 ~ 124.

Bollobás B., On generalized graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 16, 1965, 445 ~ 452.

Bollobás B., D.E. Daykin, and P. Erdös, Sets of independent edges of a hypergraph, Quart. *J. Math. Oxford* (2), 21(1976), 25 ~ 32.

Brouwer A.E., and A. Schrijver, The blocking number of an affine space, *J. Comb. Theory A*, 24, 1978, 251 ~ 253.

Brualdi R.A., and T.H. Foregger, Packing boxes with harmonic bricks, *J. Comb. Theory B*, 17, 1974, 81 ~ 114.

Bruen A.A., Blocking sets in finite projective planes, *SIAM J. Applied Math.* 21, 1971, 380 ~ 392.

Bruen A.A., and M.J. de Resmini, Blocking sets in affine planes, Combinatorics 81 (Barletti Cecchesini), *Ann. Discrete Math.* 18, 1983, 169 ~ 176.

Chaiken S., D.J. Kleitman, M. Saks, and J. Shearer, Covering regions by rectangles, *SIAM J. on Algebraic and Discrete Methods*, 2, 1981, 394 ~ 410.

Chvátal V., Hypergraphs and Ramseyian theorems, *Proc. Am. Math. Soc.* 27, 1971, 434 ~ 440.

Erdös P., On a combinatorial problem, V, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 15, 1964, 445 ~ 447.

Erdös P., A problem of independent $r$-tuples, *Annales Univ. Budapest* 8, 1965, 93 ~ 95.

Erdös P., and T. Gallai, On the maximal paths and circuits of graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 10, 1959, 337 ~ 357.

Erdös P., and T. Gallai, On the maximal number of vertices representing the edges of a graph, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* 6, 1961, 181 ~ 203.

Erdös P., A. Hajnal, and J.W. Moon, Mathematical notes, *Amer. Math. Monthly* 71, 1964, 1107 ~ 1110.

Gyárfás A., and J. Lehel, Hypergraph families with bounded edge cover or transversal number, *Combinatorica* 3, 1983, 351 ~ 358.

Gyárfás A., J. Lehel, and Z. Tuza, Upper bound on the order of $r$-critical hypergraphs, *J. Comb. Theory B*, 33, 1982, 161 ~ 165.

Györi E., Covering simply connected regions by rectangles (private communication, 1984).

Györi E., A minimax theorem on intervals, *J. Comb. Theory B*, 1, 1985.

Hansen P., and M. Lorea, Degrees and independent sets of hypergraph, *Discrete Math.* 14, 1976, 305 ~ 309.

Hansen P., and B. Toft, On the maximum number of vertices in $n$-uniform cliques, *Ars Combinatoria* 16A, 1983, 205 ~ 216.

Henderson J., and R.A. Dean, The 1-width of (0,1)-matrices having constant sum three, *J. Comb. Theory A*, 16, 1974, 355 ~ 370.

Herzog M., and J. Schönheim, The B property and chromatic numbers of generalized graphs, *J. Comb. Theory B*, 12, 1972, 41 ~ 49.

Jaeger F., and C. Payan, Détermination du nombre maximum d'arêtes d'un hypergraphe $\tau$-critique, *C.R. Acad. Sci. Paris* 271, 1971, 221 ~ 223.

Jamison R.E., Covering finite fields with cosets of subspaces, *J. Comb. Theory B*, 37, 1984, 279 ~ 282.

Kahn K., A family of perfect graphs associated with directed graphs, *J. Comb. Theory B*, 37, 1984, 279 ~ 282.

Lehel J., Covers in hypergraphs, *Combinatorica* 2, 1982, 305 ~ 309.

Lehel J., $\tau$-critical hypergraphs and the Helly property, *Ann. Discrete Math.* 17, 1983, 413 ~ 418.

Lehel J., Multitransversals in $\tau$-critical hypergraphs, *Finite and Infinite Sets*, Coll. Math. Soc. Bolyai, 1981, 567 ~ 576.

Lorea M., Ensembles stables dans les hypergraphes, *C.R. Acad. Sci. Paris* 275, 1972, 163 ~ 165.

Lucchesi C.C., and D.H. Younger, A minimax theorem for directed graphs, *J. London Math. Soc.* 17, 1978, 369 ~ 374.

Meyer J.C., Ensembles stables maximaux dans les hypergraphes, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 274, 1975, 144 ~ 147.

Pelikan J., Properties of balanced incomplete block designs, in *Combinatorial Theory and Its Applications* (Erdös, Renyi, Sós, eds.), North Holland, Amsterdam 1971, 869 ~ 890.

Ryser H., New types of combinatorial designs, *Actes Congrès International des mathématiciens*, Nice 1970, 3, 235 ~ 239.

Schmidt W.M., Ein kombinatorisches Problem von Erdös und Hajnal, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 15, 1964, 373 ~ 374.

Seymour P.D., On the two colouring of hypergraphs, *Quart. J. Math. Oxford*(3), 25, 1974, 303 ~ 312.

Seymour P.D., Packing nearly-disjoint sets, *Combinatorica* 2, 1982, 91 ~ 97.

Stein S.K., The combinatorial covering theorems, *J. Comb. Theory A*, 16, 1974, 391 ~ 397.

Sterboul F., Sur le nombre transversal des hypergraphes uniformes, *Discrete Math.* 22, 1978, 91 ~ 96.

Szemerédi E. and Gy. Petruska, On a combinatorial problem I, *Studia Sci. Math. Hung.* 7, 1972, 363 ~ 374.

Tuza Z., Helly-type hypergraphs and Sperner families, *European J. Combinatorics* 5, 1984, 185 ~ 187.

Tuza Z., The method of set-pairs for extremal problems in hypergraphs, *Finite and Infinite Sets*, Coll. Math. Soc. Bolyai, 1981, 749 ~ 762.

Tuza Z., Critical hypergraphs and intersecting set-pair systems, *J. Comb. Theory B*, 39, 1985, 134 ~ 145.

# 第3章　分数横贯

## 1　分数横贯数

设 $s$ 是一个整数，$q$ 是超图 $H$ 的边集到 $\{0,1,2,\cdots,s\}$ 的一个函数，满足

$$\sum_{E\in H(x)} q(E)\leqslant s \quad (\forall x\in X)$$

则称 $q$ 为超图 $H$ 的一个 **s-匹配**。$\sum_{E\in H} q(E)$ 称为这一个 $s$-匹配的值；$\nu_s(H)=\max_q\sum_{E\in H} q(E)$ 表示超图 $H$ 的所有 $s$-匹配的最大值。显然，1-匹配就是匹配，因此 $\nu_1(H)=\nu(H)$。

**分数匹配**是一个实值函数 $q$，满足：

(1) $0\leqslant q(E)$[①]　$(\forall E\in H)$

(2) $\sum_{E\in H(x)} q(E)\leqslant 1 \quad (\forall x\in X)$

超图 $H$ 的分数匹配的最大值记为

$$\nu^*(H)=\max_q\sum_{E\in H} q(E)$$

**例**　考虑一个剪残棋盘，如图1是有27个方格的剪残棋盘。希望用若干 $2\times 3$ 的矩形卡片覆盖这棋盘，使每一张卡片覆盖6个方格，则最多用几张这样的卡片覆盖棋盘，使得没有两张卡片相重叠？现构作超图 $H$[②]，它以棋盘中方格全体为顶点集，以能被一张卡片覆盖的方格集合为边，则答案是 $\nu(H)$。图1中给出了一个3条边组成的匹配，即 $\nu(H)=3$。下面的问题较为困难：在这棋盘中，最多需用几张卡片，使每个方格至多覆盖2次？答案为 $\nu_2(H)$，图2给出了一个含有7条边的2-匹配，因此 $\nu_2(H)=7$。经稍微细致分析可证明 $\nu^*(H)=\dfrac{7}{2}$。

设 $H$ 为 $X$ 上的超图。对整数 $k\geqslant 1$，若函数

$$p:X\to\{0,1,2,\cdots,k\}$$

满足

$$\sum_{x\in E} p(x)\geqslant k \quad (\forall E\in H)$$

则称 $p$ 为 $H$ 的一个 **k-横贯**。

---

① 原文中还有条件 $q(E)\leqslant 1$，实际上它蕴含在(2)中。

② 上述定义的 $H$，有一方格不在任何边中，与超图的定义相矛盾。我们可将该方格从顶点集中除去，而不影响问题的讨论。

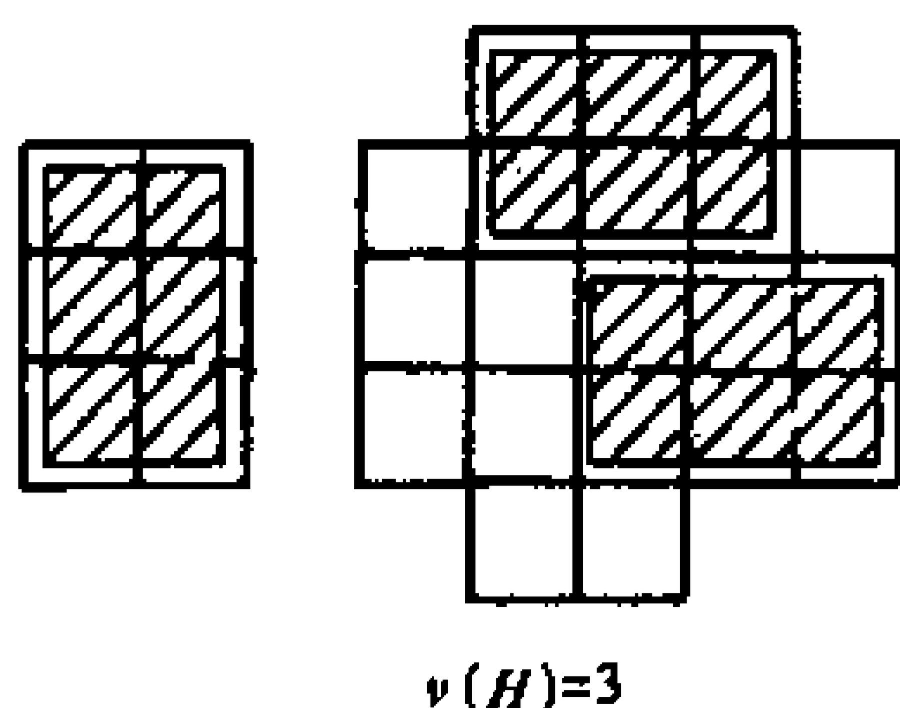



图 1

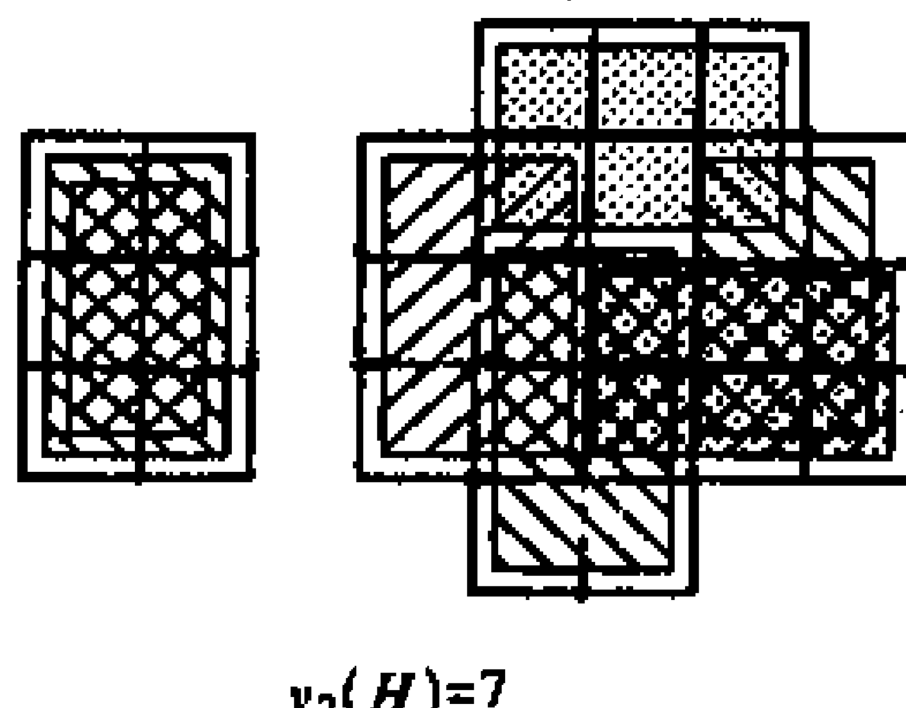



图 2

$\sum_{x\in X}p(x)$ 称为 $k$- 横贯 $p$ 的值,用 $\tau_k(H)$ 表示 $H$ 的 $k$- 横贯中的最小值。显然1-横贯就是横贯,故 $\tau_1(H)=\tau(H)$。

$H$ 的**分数横贯**是 $X$ 上的一个实值函数 $p(x)$,满足:

(1) $0\leqslant p(x)\leqslant 1 \qquad (\forall x\in X)$

(2) $\sum_{x\in E}p(x)\geqslant 1 \qquad (\forall E\in H)$

用 $\tau^*(H)=\min_p\sum_{x\in X}p(x)$ 表示 $H$ 的**分数横贯数**。本章主要讨论这个数。

**例** 若 $H$ 是图 $C_5$,可直接得出 $p(x)\equiv 1$ 是一个 2- 横贯,且 $\tau_2(H)=5$。$p(x)\equiv 0.5$ 是一个分数横贯,且 $\tau^*(H)=2.5$。此外 $\nu_1(H)=2,\nu_2(H)=5$,$\nu^*(H)=2.5$。

**注** 设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的超图,令 $A=(a_{ij})$ 是 $H$ 的关联矩阵,其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果 } x_i\in E_j\\ 0 & \text{如果 } x_i\notin E_j\end{cases}$$

一个分数匹配可以看作多面体:

$$Q=\{\boldsymbol{q}\mid \boldsymbol{q}\in\mathbf{R}^m,\boldsymbol{q}\geqslant\mathbf{0},A\boldsymbol{q}\leqslant\mathbf{1}\}$$

的一个矢量。这个 $m$ 维空间中的多面体称为 $H$ 的**匹配多面体**,匹配是 $Q$ 中坐标分量为 0 或 1 的矢量。类似地,一个分数横贯可以看作多面体:

$$P=\{\boldsymbol{p}\mid \boldsymbol{p}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{p}\geqslant\mathbf{0},A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}\geqslant\mathbf{1}\}$$

中的一个矢量。这个多面体称为**横贯多面体**。

**定理 1**(Berge, Lovász, Simonovits) 任一超图 $H$ 满足:

$$\nu(H)=\min_{s\geqslant 1}\frac{\nu_s(H)}{s}\leqslant\max_{H'\subseteq H}\frac{m(H')}{\Delta(H')}\leqslant\max_{s\geqslant 1}\frac{\nu_s(H)}{s}=\nu^*(H)$$

$$=\tau^*(H)=\min_{k\geqslant 1}\frac{\tau_k(H)}{k}\leqslant\min_{A\subseteq X}\frac{|A|}{s(H_A)}\leqslant\max_{k\geqslant 1}\frac{\tau_k(H)}{k}=\tau(H)$$

这些不等式称为"基本不等式"。表达式中出现的"max"(或"min")意指上界(或下界)可达。

**证**　1. $\nu(H)=\min\limits_{s\geq 1}\frac{\nu_s(H)}{s}$

令 $H'$ 是满足 $\nu(H)=m(H')$ 的匹配。现将 $H'$ 中每条边重复 $s$ 次，得超图 $sH'$，$sH'$ 是 $H$ 的一个 $s$- 匹配，因此有 $\nu_s(H)\geqslant s\nu(H)$，而当 $s=1$ 时等号成立。故

$$\min_{s\geq 1}\frac{\nu_s(H)}{s}=\nu(H)$$

2. $\min\limits_{s\geq 1}\frac{\nu_s(H)}{s}\leqslant\max\limits_{H'\subseteq H}\frac{m(H')}{\Delta(H')}$

令 $H''$ 是 $H$ 的最大匹配，则有

$$\nu(H)=\frac{m(H'')}{\Delta(H'')}\leqslant\max_{H'\subseteq H}\frac{m(H')}{\Delta(H')}$$

3. $\max\limits_{H'\subseteq H}\frac{m(H')}{\Delta(H')}\leqslant\sup\limits_{s}\frac{\nu_s(H)}{s}$

令 $H''\subset H$，使得 $\frac{m(H'')}{\Delta(H'')}=\max\limits_{H'\subseteq H}\frac{m(H')}{\Delta(H')}$。若记 $s=\Delta(H'')$，则

$$\max_{H'\subseteq H}\frac{m(H')}{\Delta(H')}=\frac{m(H'')}{\Delta(H'')}\leqslant\frac{\nu_s(H)}{s}\leqslant\sup_{s}\frac{\nu_s(H)}{s}$$

4. $\sup\limits_{s}\frac{\nu_s(H)}{s}=\max\limits_{s}\frac{\nu_s(H)}{s}=\nu^*(H)$

令 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_m)$ 是 $H$ 的最大 $s$- 匹配，由于 $\frac{z}{s}\in Q$，有

(1) $\frac{\nu_s(H)}{s}=\sum\frac{z_i}{s}\leqslant\nu^*(H)$

反之，设 $q$ 是使 $\sum q_i=\nu^*(H)$ 的分数匹配。由于 $q$ 是由整系数线性不等式所界定的多面体 $Q$ 的极值点，故 $q_i$ 是有理数。令

$$q_i=\frac{z_i}{s}\qquad(s,z_1,z_2,\cdots,z_m\text{ 是非负整数})$$

由于 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_m)\geqslant\mathbf{0}$，且 $Az=A(sq)=sAq\leqslant s\cdot\mathbf{1}$，则矢量 $z$ 是一个 $s$-匹配，因此

$$\nu^*(H)=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{m}z_i\leqslant\frac{\nu_s(H)}{s}$$

所以由(1)，$\frac{\nu_s(H)}{s}=\nu^*(H)$，且有

$$\sup_{s}\frac{\nu_s(H)}{s}=\max_{s}\frac{\nu_s(H)}{s}=\nu^*(H)$$

5. $\nu^*(H)=\tau^*(H)$

由线性规划的对偶理论可得：

$$\min_{p\in P}\sum p_i=\max_{q\in Q}\sum q_i$$

6. $\tau^*(H) = \min_k \frac{\tau_k(H)}{k} = \inf_k \frac{\tau_k(H)}{k}$

令 $p$ 是使得 $\sum p_i = \tau^*(H)$ 的分数横贯。由于多面体 $P$ 的极值点的坐标是有理数，令 $t = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 使得

$$p_i = \frac{t_i}{k} \qquad (k, t_1, t_2, \cdots, t_n \text{ 为非负整数})$$

由于 $A^T p \geqslant 1$，我们有 $A^T t \geqslant k1$，故 $t$ 是一个 $k$- 横贯。因此

$$\tau^*(H) = \frac{\sum t_i}{k} \geqslant \frac{\tau_k(H)}{k}$$

反之，每一个整数 $k$ 满足 $\frac{\tau_k}{k} \geqslant \tau^*(H)$，从而有

$$\inf_k \frac{\tau_k(H)}{k} = \min_k \frac{\tau_k(H)}{k} = \tau^*(H)$$

7. $\min_k \frac{\tau_k(H)}{k} \leqslant \min_{A \subseteq X} \frac{|A|}{s(H_A)}$

设 $A \subseteq X$，令

$$s = s(H_A) = \min_i |E_i \cap A|$$

则集合 $A$ 的特征函数是一个 $s$- 横贯，因此 $\tau_s(H) \leqslant |A|$。于是有

$$\min_k \frac{\tau_k(H)}{k} \leqslant \frac{\tau_s(H)}{s} \leqslant \frac{|A|}{s(H_A)}$$

由于这结论对任意的 $A \subseteq X$ 成立，故

$$\min_k \frac{\tau_k(H)}{k} \leqslant \min_{A \subseteq X} \frac{|A|}{s(H_A)}$$

8. $\min_{A \subseteq X} \frac{|A|}{s(H_A)} \leqslant \max_k \frac{\tau_k(H)}{k}$

令 $T$ 是 $H$ 的最小横贯，则有

$$\min_{A \subseteq X} \frac{|A|}{s(H_A)} \leqslant \frac{|T|}{s(H_T)} \leqslant |T| = \frac{\tau_1(H)}{1} \leqslant \max_k \frac{\tau_k(H)}{k}$$

9. $\max_k \frac{\tau_k(H)}{k} = \tau(H)$

设 $T$ 是 $H$ 的一个最小横贯，$t(x)$ 为 $T$ 的特征函数：

$$t(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x \in T \\ 0 & \text{如果 } x \notin T \end{cases}$$

则对整数 $k$，函数 $kt(x)$ 是 $k$- 横贯。因此有

$$\tau_k(H) \leqslant \sum_{x \in X} kt(x) = k|T|$$

故

$$\max_k \frac{\tau_k(H)}{k} \leqslant |T| = \tau(H)$$

**推论 1**　具有 König 性质的超图 $H$ 含有 $k$ 条两两不交的边的充要条件是:

$$ks(H_A) \leqslant |A| \qquad (\forall A \subseteq X)$$

事实上,若超图 $H$ 满足 König 性质,则 $\nu(H) = \tau(H)$,于是有

$$\nu(H) = \min_{A \subseteq X} \frac{|A|}{s(H_A)}$$

因此 $\nu(H) \geqslant k$ 与给定的条件等价。

**推论 2**　具有 König 性质的超图含有与每条边均相交的 $k$ 点集的充要条件是:

$$k\Delta(H') \geqslant m(H') \qquad (\forall H' \subset H)$$

(与推论 1 的证明类似)

**推论 3**　设 $H$ 是 $r$- 一致正则超图,则 $p(x) \equiv \frac{1}{r}$ 是最优分数匹配。

事实上,考虑 $n$ 阶 $r$- 一致正则超图 $H$,用两种不同的方法计数点 - 边关联二部图的边数得

$$m(H)r = \Delta(H)n$$

因此由定理 1,可得

$$\frac{n}{r} = \frac{m(H)}{\Delta(H)} \leqslant \max_{H' \subset H} \frac{m(H')}{\Delta(H')} \leqslant \tau^*(H) \leqslant \min_{A \subseteq X} \frac{|A|}{s(H_A)} \leqslant \frac{n}{r}$$

所以,$\tau^*(H) = \frac{n}{r}$ 且 $p(x) \equiv \frac{1}{r}$ 是最优的。

**例**　对于 $r$- 一致完全超图 $K_n^r$,由推论 3 有

$$\tau^*(K_n^r) = \frac{n}{r}$$

且还有

$$\nu(K_n^r) = \left[\frac{n}{r}\right] \leqslant \tau^*(K_n^r) = \frac{n}{r} \leqslant \tau(K_n^r) = n - r + 1$$

另一个例子,对圈 $C_5$,由推论 3 有

$$\tau^*(C_5) = \frac{5}{2}$$

和

$$\nu(C_5) = 2 \leqslant \tau^*(C_5) = \frac{5}{2} \leqslant \tau(C_5) = 3$$

将定理 1 中的结果应用到对偶超图 $H^*$,有完全不同的组合意义的解释。

设 $H$ 是 $X$ 上的一个超图,$k \geqslant 1$ 是整数,若函数 $f: X \to \{0,1,2,\cdots,k\}$ 满足

$$\sum_{x \in E} f(x) \leqslant k \qquad (\forall E \in H)$$

则称 $f$ 是 $H$ 的一个**强 $k$- 独立函数**。令

$$\bar{\alpha}_k(H) = \max_f \sum_{x\in X} f(x)$$

易知,一个 $H$ 中的强 1- 独立函数就是 $H$ 中的一个独立集,且有 $\bar{\alpha}_1(H) = \bar{\alpha}(H)$。

**性质 1** 若 $H^*$ 是 $H$ 的对偶,则

$$\bar{\alpha}_k(H) = \nu_k(H^*)$$

事实上,$H$ 上的一个强 $k$- 独立函数确定了 $H^*$ 的一个 $k$- 匹配,反之亦然。故结论成立。

**性质 2** 若 $H$ 是 $n$ 阶 $r$- 一致超图,$\lambda, k, k'$ 是满足 $k + k' = \lambda r$ 及 $\lambda \geqslant k$①的整数,则

$$\bar{\alpha}_k(H) = \lambda n - \tau_{k'}(H)$$

事实上,对 $H$ 的一个强 $k$- 独立函数 $f$

$$\sum_{x\in E} f(x) \leqslant k \qquad (\forall E \in H)$$

构造函数 $p(x) = \lambda - f(x) \geqslant 0$,从而有

$$\sum_{x\in E} p(x) = \lambda r - \sum_{x\in E} f(x) \geqslant \lambda r - k = k' \qquad (E \in H)$$

这表示 $p$ 是 $H$ 的 $k'$- 横贯。进而有

$$\sum_{x\in X} f(x) = \lambda n - \sum_{x\in X} p(x)$$

因此,

$$\bar{\alpha}_k(H) = \max_f \sum_{x\in X} f(x) = \lambda n - \min_p \sum_{x\in X} p(x) = \lambda n - \tau_{k'}(H)$$

显然,若超图是图 $G$,取 $\lambda = k = k' = 1$,就得到著名的等式

$$\alpha(G) + \tau(G) = n$$

对于整数 $s \geqslant 1$,$H$ 的一个 $s$- 覆盖是满足以下条件的一个函数 $g$: $\{E_1, E_2, \cdots, E_m\} \to \{0, 1, 2, \cdots, s\}$,使得

$$\sum_{E\in H(x)} g(E) \geqslant s \qquad (\forall x \in X)$$

令

$$\rho_s(H) = \min_g \sum_{E\in H} g(E)$$

**性质 3** 假设 $H^*$ 是 $H$ 的对偶,则

$$\rho_k(H) = \tau_k(H^*)$$

事实上,$H$ 的一个 $k$- 覆盖对应于 $H^*$ 的一个 $k$- 横贯,反之亦然。故结论成立。

**性质 4** 令 $H$ 是 $\Delta(H) = h$ 的正则超图,$\lambda, s, t$ 是满足 $s + t = \lambda h$ 及 $\lambda \geqslant t$②的整数,则

---

① 原文没有这一条件,但若没有这一条件,易举出反例。

② 原文没有这一条件,但若没有这一条件,易举出反例。

$$\rho_s(H) = \lambda m - \nu_t(H)$$

事实上，$H^*$ 是一个 $h$- 一致超图，由性质1,2和3，有

$$\rho_s(H) = \tau_s(H^*) = \lambda m - \bar{\alpha}_t(H^*) = \lambda m - \nu_t(H)$$

于是由对偶性可得定理1′。

**定理1′** 任一超图 $H$ 满足：

$$\bar{\alpha}(H) = \min_{k\geq 1}\frac{\bar{\alpha}_k(H)}{k} \leqslant \max_{A\subseteq X}\frac{|A|}{r(H_A)} \leqslant \max_{k\geq 1}\frac{\bar{\alpha}_k(H)}{k} = \alpha^*(H) = \rho^*(H)$$

$$= \min_{k}\frac{\rho_k(H)}{k} \leqslant \min_{H'\subseteq H}\frac{m(H')}{\delta(H')} \leqslant \max_{k\geq 1}\frac{\rho_k(H)}{k} = \rho(H)$$

**推论** 具有对偶 König 性质的超图 $H$ 存在 $k$- 覆盖的充要条件是：

$$kr(H_A) \geqslant |A| \qquad (\forall A \subseteq X)$$

事实上，如果 $\bar{\alpha}(H) = \rho(H)$，则有

$$\rho(H) = \max_{A\subseteq X}\frac{|A|}{r(H_A)} \leqslant k$$

这等价于给定的条件。

*例* 考虑高斯的一个著名问题：在8×8的棋盘中，最多能放置几个王后，使得没有两个王后在同一行、同一列和同一对角线上？考虑图A(图3)，那里放置8个符合要求的王后，显然，8是最大数。用超图语言来说，若棋盘的方格为顶点，以行、列和对角线上的方格为边的超图 $H$ 有 $\bar{\alpha}(H) = 8$。显然，$\rho(H) = 8$，因为8个列就构成一个覆盖，因此，超图 $H$ 具有对偶 König 性质：$\bar{\alpha}(H) = \rho(H)$。

下面的问题较为困难：至少需放置多少个王后，使这棋盘中每行、每列和每一对角线上至少有一个王后？显然，$\nu(H) = 14$。由于7条相互平行的白色对角线和7条平行的黑色对角线形成 $H$ 的一个匹配。此外，也有 $\tau(H) = 14$，在图B中描述了14个元素构成的一个横贯。因此，$\nu(H) = \tau(H)$，故超图 $H$ 具有 König 性质。

不同于上述控制问题，问最少需放置多少个王后能控制每个方格？这答案为5，图C的解对应一个最小权的最大强独立集：即 $\bar{\alpha}'(H) = 5$。

我们也可提出这样一个问题：能否放置16个王后，使每行、每列和每一对角线至多有2个王后？由于 $\bar{\alpha}_2(H) = 2\bar{\alpha}(H) = 16$，若允许2个王后占据同一个方格，问题则变成显然了。下面，图D给出了一个(0,1)- 解矢量，也就是一个最优的强2- 独立集。

最后，考虑如下问题：是否存在放置在不同方格中的28个王后组成的2- 横贯？图E给出了一个用(0,1)- 解矢量表示的最优2- 横贯。

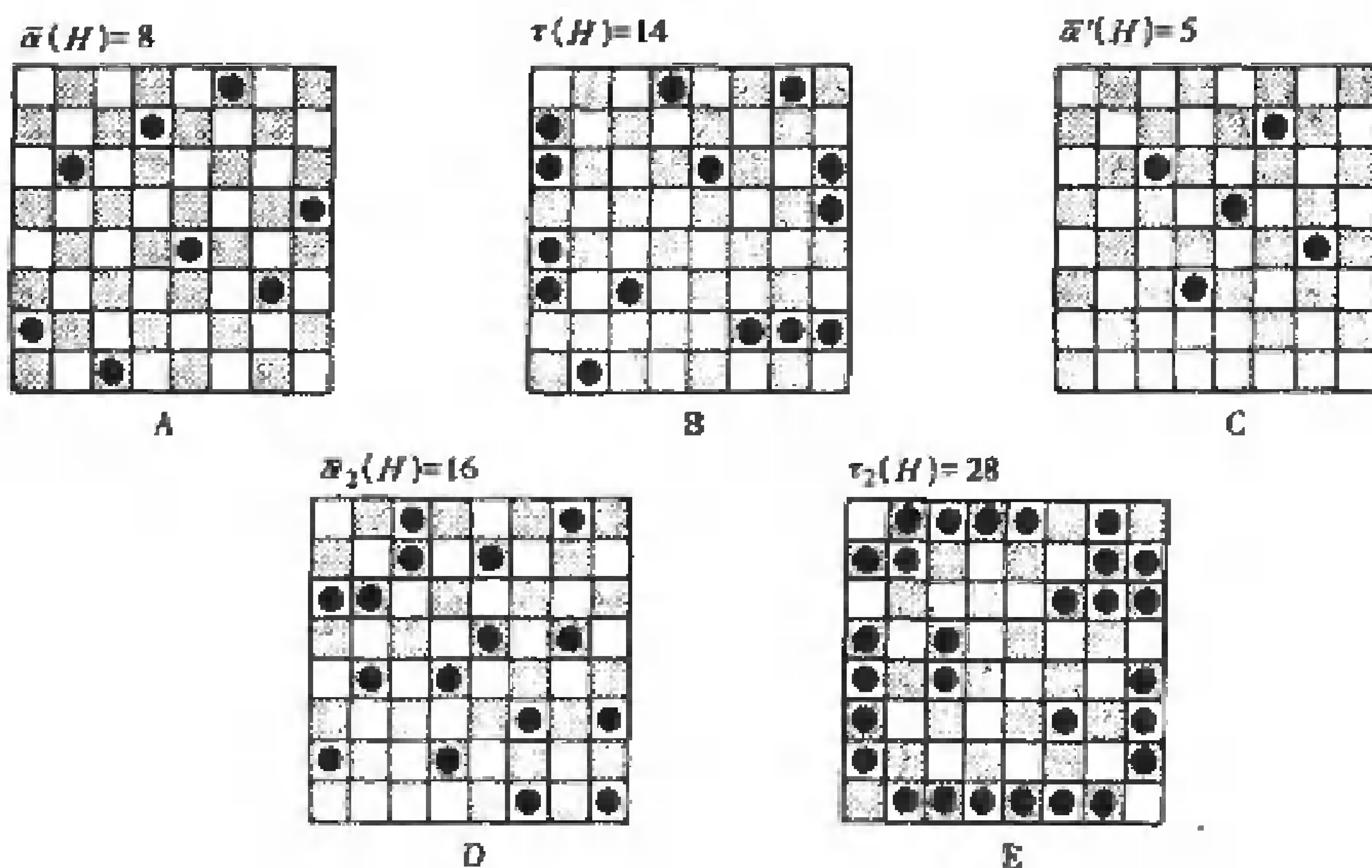



图 3

## 2　图的分数横贯

下面所考虑的超图是简单图,记为 $G=(X,E)$。由定理 1,有

$$\nu(G)=\min_{k\geqslant 1}\frac{\nu_k(G)}{k}\leqslant\max_{G'\subseteq G}\frac{m(G')}{\Delta(G')}=\tau^*(G)$$

$$=\min_{k\geqslant 1}\frac{\tau_k(G)}{k}\leqslant\max_{k\geqslant 1}\frac{\tau_k(G)}{k}=\tau(G)$$

**定理 2**　每个图 $G$ 满足

$$\tau^*(G)=\frac{\nu_2(G)}{2}=\frac{\tau_2(G)}{2}$$

此外,存在一个最大的 2- 匹配 $H\subset 2G$,其中 $H$ 的连通分支为孤立点、平行边和奇圈。

对于这样的 2- 匹配 $H$,存在一个最小的分数横贯 $t$,使和 $t(x)=0$,若 $x$ 为 $H$ 的孤立点;$t(x)=0,t(y)=1$ 或 $t(x)=t(y)=\frac{1}{2}$,若 $x$ 和 $y$ 是 $H$ 中一对平行边的端点;$t(x)=\frac{1}{2}$,若 $x$ 含在 $H$ 的一个奇圈中。

**证**　假设 $H\subset 2G$ 是使 $m(H)$ 最大的 2- 匹配。$H$ 的一个连通分支若是长为偶数的路或偶圈,则可用数条平行边代替这个连通分支而不改变 $m(H)$。$H$ 中没有连通分支是长为奇数的路,否则用数条平行边替代该分支将增加 $m(H)$。故可假设 $H$ 是满足定理所描述的 2- 匹配。

现在按下面的规则依次对 $G$ 的顶点分别标上 0,1 或$\frac{1}{2}$：

(1) $H$ 的孤立点标以 0;

(2) 在 $G$ 中与标以 0 的点的邻点标以 1;

(3) 在 $H$ 中与标以 1 的点的邻点标以 0;

(4) 未被规则(1),(2) 和(3) 所标的其他点标以 1/2。

注意到从 $H$ 的一个孤立点出发,沿着 $G-H$ 的边与 $H$ 的平行边的奇交错路 $P$,其终点不能是 $H$ 的孤立点;否则在 $P$ 中,交换 $G-H$ 的边集 $E'$ 与 $H$ 中的平行边集 $E''$,则 $H'=H-E''+E'$ 是 $G$ 中的 2- 匹配,且有 $m(H')\geqslant m(H)+1$,这与 $H$ 的最大性相矛盾。类似地,上述类型的奇交错路其终点在 $H$ 的一个奇圈上。最后,上述类型的奇交错路不能含有其他标以 0 的点。

因此,上面的规则定义了 $t(x)$, $\forall x\in X$。由规则(2) 知,$t(x)$ 是 $G$ 的一个分数横贯。又由定理 1,可得

$$\frac{m(H)}{2}=\frac{\nu_2(G)}{2}\leqslant\tau^*(G)\leqslant\sum_{x\in X}t(x)=\frac{m(H)}{2}$$

故上式等号成立。同时也证明了 $t(x)$ 是 $G$ 的最小分数横贯,且有

$$\tau^*(G)=\frac{\nu_2(G)}{2}=\frac{\tau_2(G)}{2}$$

**定理 3**(Lovász[1975])　任一图 $G$ 满足

$$\tau^*(G)\leqslant\frac{1}{2}(\nu(G)+\tau(G))$$

**证**　假设 $T$ 是图 $G=(X,E)$ 的一个最小横贯,则 $S=X-T$ 是 $G$ 的最大独立集。令 $k$ 是一个端点在 $S$ 中的两两不交的边的最大数目。由二部图中的 König 定理的证明知(见 Graphs,第 7 章),存在 $S$ 的一个子集 $A_0$,满足

$$|S-A_0|+|\Gamma_G A_0|=\min_{A\subseteq S}(|S-A|+|\Gamma_G A|)=k$$

令

$$t(x)=\begin{cases}0 & \text{若 } x\in A_0\\ 1 & \text{若 } x\in\Gamma_G A_0\\ \frac{1}{2} & \text{若 } x\in X-(A_0\cup\Gamma_G A_0)\end{cases}$$

显然,$t(x)$ 是 $G$ 的一个分数横贯。因此

$$\begin{aligned}2\tau^*(G)&\leqslant 2\sum_{x\in X}t(x)=|T|+|\Gamma_G A_0|+|S-A_0|\\&=\tau(G)+k\leqslant\tau(G)+\nu(G)\end{aligned}$$

故结论成立。

**推论**　对于图 $G$,下列陈述等价:

(1) $\tau^*(G)=\tau(G)$

(2) $\nu(G) = \tau(G)$

**证**　由基本不等式知,(2)⇒(1) 成立。

下面证(1)⇒(2)。

假设 $G$ 满足(1),由定理 3 有

$$\tau(G) = \tau^*(G) \leqslant \frac{1}{2}(\nu(G) + \tau(G)) \leqslant \frac{1}{2}(\tau(G) + \tau(G))$$

因而(2) 成立。

**注**　由 $\tau^*(G) = \nu(G)$ 推不出 $\nu(G) = \tau(G)$。例如,$\tau^*(K_4) = \nu(K_4) = 2$,但 $\tau(K_4) = 3$。

在定理 2 中所给的最优 2- 匹配确定一个最优分数匹配 $q$。$G$ 中使 $q(e) \neq 0$ 的这些边 $e$ 诱导出 $G$ 的一个部分子图,这个子图的连通分支是:孤立点、孤立边和奇圈。这样的一个最优分数匹配称为是典型的。Balinski[1970] 证明了典型的匹配是匹配多面体的极点。我们有下面的定理 4。

**定理 4** (Uhry [1975])　$G = (X, E)$ 是一个图,$q$ 是一个典型的分数匹配,使得 $q(e) = \frac{1}{2}$ 的这些边 $e$ 组成的集合为在包含意义下的极小集,则 $G$ 的一个最大匹配 $M$ 为

$$M_0 = \{e | e \in E, q(e) = 1\}$$

和 $M_i$ 的并集,这里 $M_i$ 为

$$\{e | e \in E, q(e) \neq 0\}$$

中奇圈 $\mu_i$ 的最大匹配,$i = 1,2\cdots$

(*) **证**　假设 $\mu_1, \mu_2 \cdots$ 是 $\left\{e | e \in E, q(e) = \frac{1}{2}\right\}$ 中的所有奇圈,$X_i$ 表示 $\mu_i$ 的顶点集合,则

$$X_0 = X - \bigcup_{i \geq 1} X_i$$

易见 $M_0$ 是子图 $G[X_0]$ 的一个最大匹配。下面将证明 $M = M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup \cdots$ 是 $G$ 的最大匹配。

若匹配 $M$ 不是最大的,则由交错路引理(Graphs,第 7 章,§1),在 $G$ 中存在一条交错路 $\mu[a, b]$,其中 $a, b$ 是 $M$ 非饱和点。在子图 $G[X_0]$ 中,$M$ 的边构成一个最大匹配,因此,$\mu[a, b]$ 至少与一个 $X_i$ 相交,不妨设为 $X_1$。此外,由于子图 $G[X_1]$ 含唯一的一个 $M$ 非饱和点,$\mu[a, b]$ 的另一个端点在 $X - X_1$ 中,记为 $b$。令 $a'$ 是路 $\mu[a, b]$ 中含在 $X_1$ 上的最后一个点。

由于 $X_1$ 和 $X - X_1$ 之间的边没有一条在 $M$ 中,必要时适当调整 $X_1$ 中的最大匹配 $M_1$,不妨设 $a' = a$。

**情况 1**　$a \in X_1, b \in X_2$。

对每个集 $F \subset E$,用 $\Phi_F(e)$ 表示 $F$ 的特征函数,并令

$$q'(e)=\begin{cases}1-q(e) & 若\ e\in\mu[a,b]\\ \Phi_{M_1}(e) & 若\ e\in\mu_1\\ \Phi_{M_2}(e) & 若\ e\in\mu_2\\ q(e) & 其他\end{cases}$$

易见 $q'(e)$ 是 $G$ 的一个分数匹配。因为

$$\sum_{e\in E}q'(e)=\sum_{e\in E}q(e)$$

故 $q'$ 也是 $G$ 的一个最优分数匹配。但 $q'$ 比 $q$ 少一些权为 $\frac{1}{2}$ 的边,这与 $q$ 的定义相矛盾。

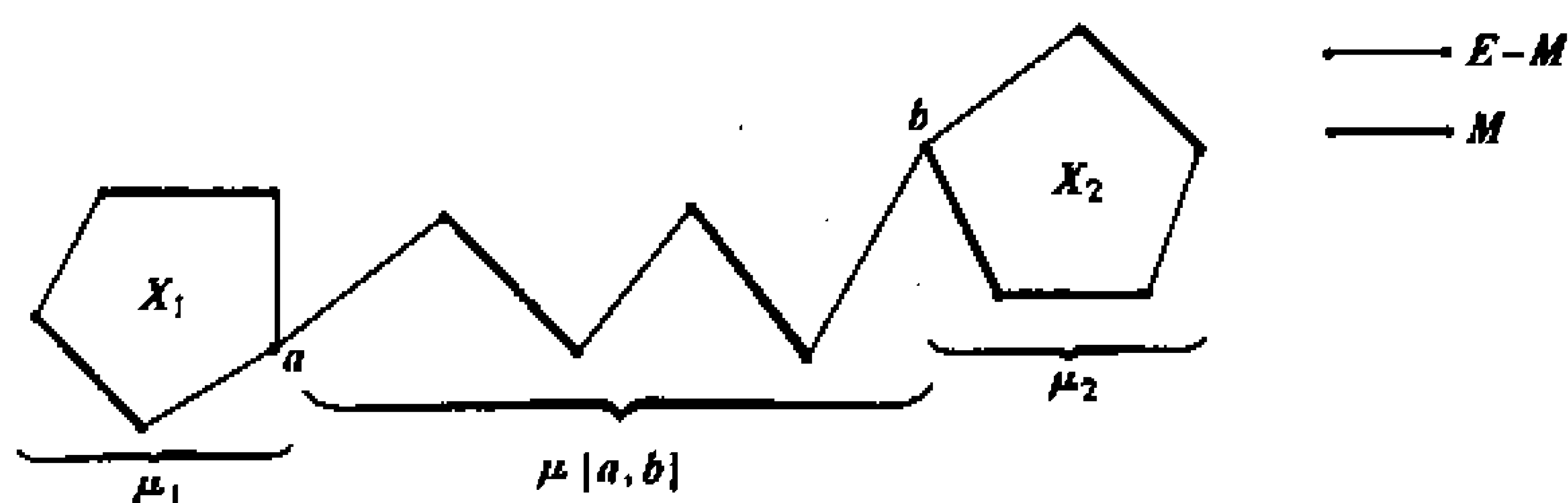



图 4

**情况 2** $a\in X_1, b\in X_0$。

令

$$q'(e)=\begin{cases}1-q(e) & 若\ e\in\mu[a,b]\\ \Phi_{M_1}(e) & 若\ e\in\mu_1\\ q(e) & 其他\end{cases}$$

显然,$q'$ 是 $G$ 的一个分数匹配,且有

$$\sum_{e\in E}q'(e)-\sum_{e\in E}q(e)=1-\frac{1}{2}>0$$

这与 $q$ 的最优性相矛盾。

上面已穷举了所有情况,故 $M$ 是最大匹配。

下面的定理被用来刻画图 $G$,其中 $G$ 具有性质 $\nu(G)=\tau^*(G)$。令 $M$ 是图 $G=(X,E)$ 中的最大匹配,$G$ 中的圈 $\mu$ 如果与 $X-\mu$ 之间没有 $M$ 的边,就称 $\mu$ 被 $M$ 分离。用 $s(M)$ 表示 $G$ 中被 $M$ 分离的两两不交的奇圈的最大个数。

**定理 5**(Balas[1981]) 每一个图 $G$ 满足

$$\tau^*(G)=\nu(G)+\frac{1}{2}\max_M s(M)$$

**证** 令 $q$ 是一个典型的分数匹配,使得满足 $q(e)=\frac{1}{2}$ 的 $e$ 构成的集合极小;

令 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s$ 表示由上述边所生成的奇圈。$M$ 为定理4陈述中定义的匹配，由于 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s$ 被 $M$ 分离，从而有

$$\tau^*(G)-\nu(G)=\sum_e q(e)-|M|=\frac{s}{2}\leqslant\frac{1}{2}\max_M s(M)$$

此外，若存在匹配 $M'$ 使得 $|M|=|M'|$ 和 $s(M')>s$，则由 $M'$ 对应的典型的分数匹配 $q'$ 可得

$$\sum_e q'(e)=|M'|+\frac{1}{2}s(M')>|M|+\frac{s}{2}=\sum_e q(e)$$

这与 $q$ 是最优的相矛盾。因此，$s=\max s(M)$，且定理中的等式成立。

为了说明这一结果，考虑图5所示的图。其中最大匹配 $M_1$，它不分离五边形；而最大匹配 $M_2$，它分离五边形。因此 $\max_M s(M)=1$，且可找一个分数横贯 $q(e)$，其值为 $\nu(G)+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$。

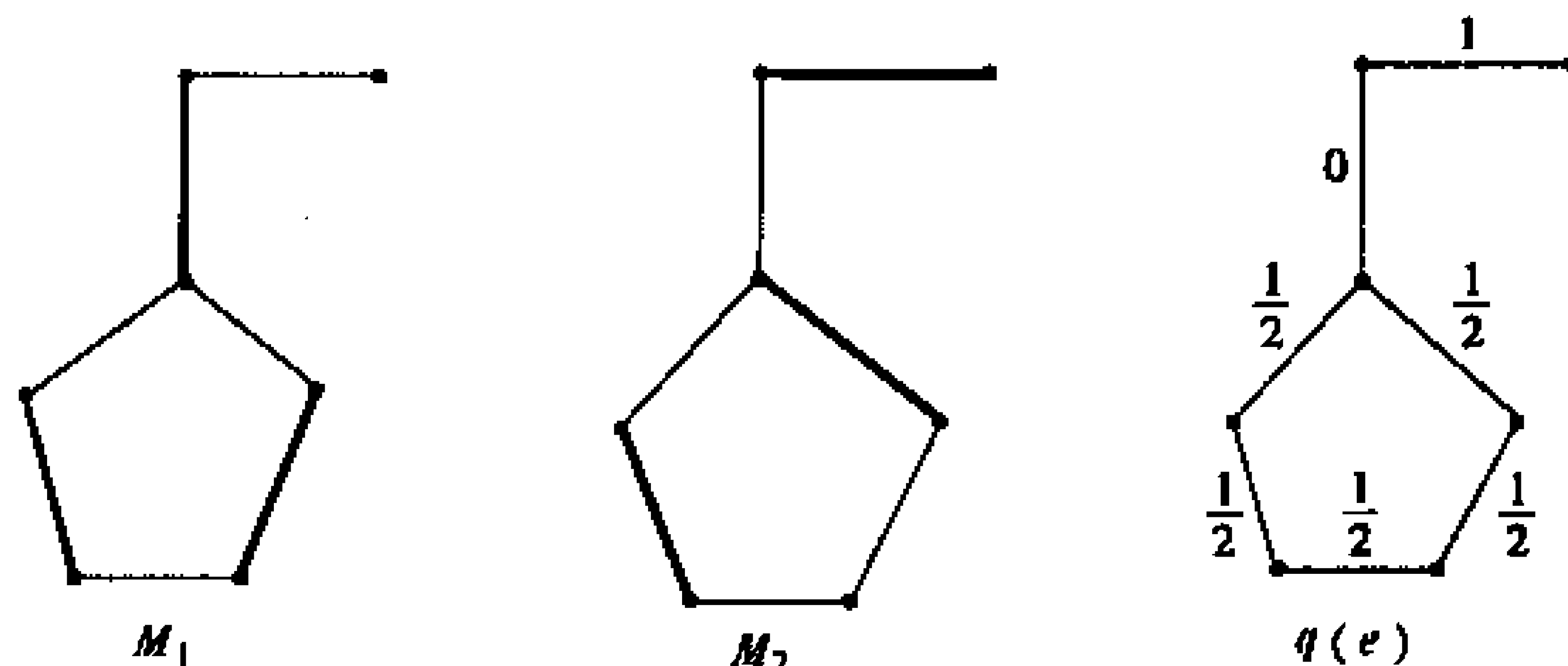



图5

**推论1** 图 $G$ 满足 $\nu(G)=\tau^*(G)$ 的充要条件是：不存在分离奇圈的最大匹配。

事实上，在这种情况下，$\max_M s(M)=0$。

**推论2**(Lovász[1975]) 每个图 $G$ 满足

(1) $\tau^*(G)\leqslant\frac{3}{2}\nu(G)$

(1) 式等号成立当且仅当 $G$ 是两两不交的三角形的并。

**证** 如果 $G$ 是由 $p$ 个点不交的三角形组成的，则 $\tau^*(G)=\frac{3}{2}p$ 和 $\nu(G)=p$，(1) 式等号成立。

若 $G$ 不是上述类型的图，令 $M$ 是使 $s(M)$ 最大的最大匹配。每个被 $M$ 分离的奇圈至少含 $M$ 的一条边，所以

$$\tau^*(G)=\nu(G)+\frac{1}{2}s(M)\leqslant\nu(G)+\frac{1}{2}\nu(G)=\frac{3}{2}\nu(G)$$

等式(1) 蕴含着每个奇圈是三角形并且恰含 $M$ 的一条边。由于存在这些三角

形外的边，则它将产生一条连接两个不同三角形上非饱和点的交错路，这与 $M$ 的最大性矛盾。

下面刻画使 $\nu(G)=\tau(G)$ 成立的图 $G$。

令 $M$ 是 $G$ 的一个最大匹配，含 $M$ 中 $k$ 条边且长为 $2k+1$ 的奇圈称为是小扁豆，在这奇圈中不与这 $k$ 条边关联的点称为基点。

若一条路的边依次在 $M$(粗边) 与 $E-M$(细边) 中交替出现，称这条路为 $M$ 交错路。

若 $\mu_1$ 是一个小扁豆，$\mu_2$ 是连接 $M$ 的一个非饱和点与 $\mu_1$ 的基点间一条长为偶数的交错路，称 $\mu_1+\mu_2$ 为**单花**(见图 6)。

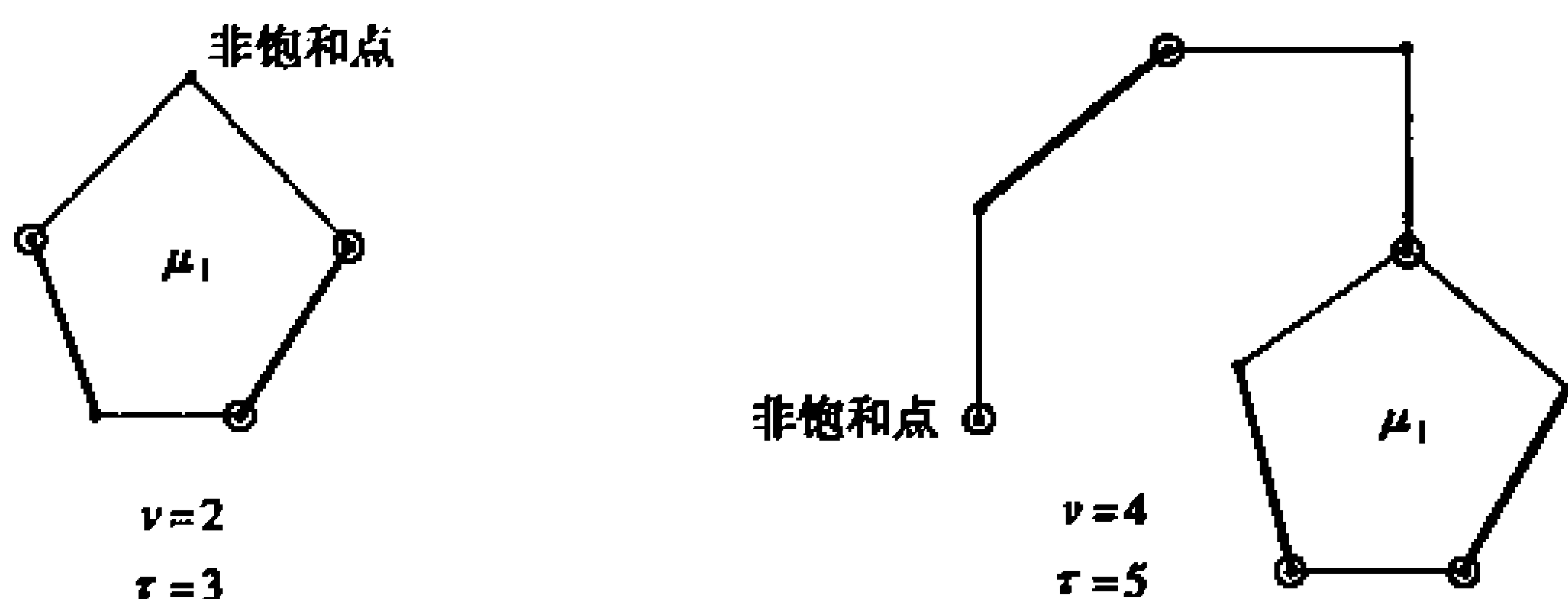



图 6 单花

若两个小扁豆 $\mu_1$ 和 $\mu_2$(可以相交) 的两个基点被一条长为奇数的交错路 $\mu_3$ 所连接，称 $\mu_1+\mu_2+\mu_3$ 为**双花**(见图 7)。

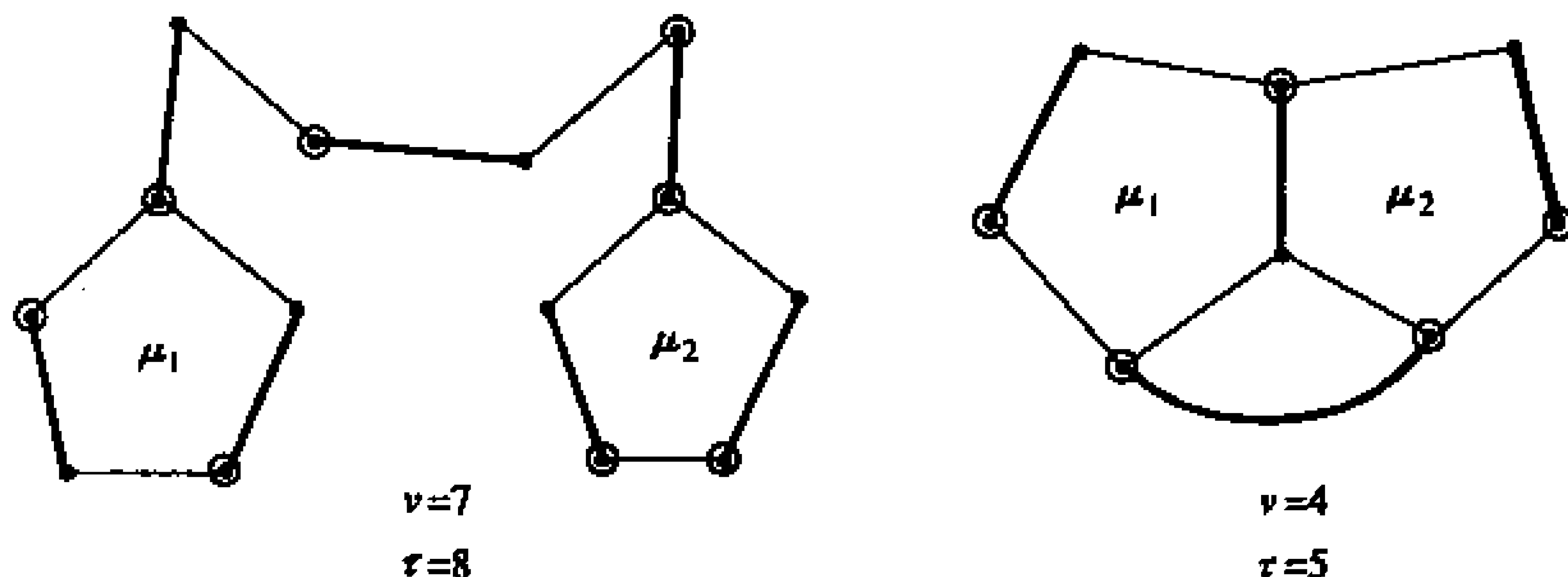



图 7 双花

对于最大匹配 $M$，从非饱和点出发，通过奇数长的而无偶数长的 $M$- 交错路到达的顶点称为是**细点**；而通过偶数长的而无奇数长的 $M$- 交错路到达的顶点称为是**粗点**；若一个顶点既可通过偶数长的交错路到达又可通过奇数长的交错路所到达，称该点为**混合点**。一个点是 **$M$- 不可达的**，若不能从一个 $M$- 非饱和点开始通过 $M$- 交错路到达的顶点。

下面的引理是匹配的推广性质中较弱的一种形式 (Gallai [1950], Berge[1967])。

**引理 1** 若 $M$ 是 $G$ 的最大匹配且 $G$ 中没有 $M$- 不可达顶点，则 $G$ 中存在混合点当且仅当 $G$ 含单花。

事实上，由非饱和点出发的交错路所到达的混合点总是某个单花的基点。

**引理 2** 若 $G$ 关于最大匹配 $M$ 来说只有粗点或细点，则 $G$ 中的细点集合 $T$ 是一个最小横贯，即 $|T| = \nu(G)$。

事实上，与每个粗点相邻的顶点都是细点，因此 $T$ 是一个横贯。$M$ 中的每条边包含一个粗点和细点，而所有的非饱和点是粗点。因此，$|T| = |M| = \nu(G)$。

**引理 3** $C$ 是 $G$ 中关于最大匹配 $M$ 的不可达顶点的诱导子图的连通分支，则 $C$ 与 $X - C$ 之间的边没有一条属于 $M$，且 $X - C$ 中与 $C$ 中某点相邻的点均是细点。

结论显然。

**定理 6**(Sterboul [1978], Deming [1979]) 对图 $G$，下面这些条件是等价的：

(1) $\nu(G) = \tau(G)$

(2) 对每个最大匹配 $M$，$G$ 不含单花和双花

(3) 存在一个最大匹配 $M$，$G$ 不含单花和双花

(*) 证 (1)⇒(2)。假设 $\nu(G) = \tau(G)$。令 $M$ 是 $G$ 的一个最大匹配。若 $G$ 中含单花 $\mu_1 + \mu_0$，$\mu_1$ 是基点为 $a$ 的小扁豆，$\mu_0 = \mu[a,b]$ 是从 $a$ 到非饱和点 $b$ 的 $M$-交错路，则匹配 $M' = M - (M \cap \mu_0) + (\mu_0 - M)$ 也是最大的，且奇圈 $\mu_1$ 被 $M'$ 分离，因此 $s(M') \geqslant 1$。由定理 5 知，$\nu(G) \neq \tau^*(G)$，矛盾。

若关于 $M$，$G$ 含双花 $\mu_1 + \mu_2 + \mu[a,b]$，这里 $\mu[a,b]$ 是连接 $\mu_1$ 和 $\mu_2$ 中两个基点的 $M$- 交错路。

若有一个非饱和点 $z$ 与双花中的一个点有交错路连接，则可通过交换该交错路上的粗边与细边，可得到一个最大对集所对应的单花。与上类似可得矛盾。否则，让 $T$ 是 $G$ 中的最小横贯，$x$ 是在 $T$ 中又在 $\mu[a,b]$ 中的一个顶点。在 $G$ 中增加一个新顶点 $x_0$ 和新边 $[x_0,x]$，所得的图记为 $G'$。注意到有 $\nu(G) \leqslant \nu(G') \leqslant \tau(G')$ 和 $\nu(G) = |M| = |T| = \tau(G) = \tau(G')$。于是有 $\nu(G') = \tau(G')$。在 $G'$ 中存在单花或 $[x_0,x] + \mu[x,b] + \mu_2$ 或 $[x_0,x] + \mu[x,a] + \mu_1$，对 $G'$ 用与上述类似的证明可得矛盾。

(2)⇒(3)。显然。

(3)⇒(1)。假设 $G$ 连通且 $\nu(G) \neq \tau(G)$。令 $M$ 是 $G$ 的一个最大匹配且不含单花和双花。又假设 $G$ 是满足上述条件且顶点数最少的图。

**情况 1** $G$ 有关于 $M$ 的非饱和点。

设 $G$ 中不可达顶点集合为 $A$，则 $|A| \neq |X|$。由引理 1，$G$ 不含混合点。因此，由 $X - A$ 所诱导的子图 $\overline{G}$ 只有粗点和细点。由于不存在两个非饱和点间的交错路，故 $\overline{M} = M \cap E(\overline{G})$ 是 $\overline{G}$ 的最大匹配。由引理 2，$\overline{G}$ 的细点集合 $\overline{T}$ 构成 $\overline{G}$ 的一个极小横贯，满足 $|\overline{T}| = |\overline{M}|$。此外，$\overline{T}$ 覆盖 $A$ 与 $X - A$ 之间的边。

由于 $\bar{G} = G[A]$ 不含非饱和点，因此 $M$ 在子图 $\bar{G}$ 上的限制 $\bar{M}$ 也是 $\bar{G}$ 上的一个最大匹配。因 $\bar{G}$ 中不含单花和双花，故由归纳假设 $\bar{G}$ 中有一个横贯 $\bar{T}$，使 $|\bar{T}| = |\bar{M}|$。则集合 $T = \tilde{T} \cup \bar{T}$ 是 $G$ 的横贯，且有 $|T| = |\tilde{T} \cup \bar{T}| = |\tilde{M} \cup \bar{M}| = |M|$，这与 $\nu(G) \neq \tau(G)$ 矛盾。

**情况2** $G$ 中没有关于 $M$ 的非饱和点。令 $T$ 为 $G$ 的最小横贯，取 $x_1 \in T$，$G'$ 是在 $G$ 中增加新顶点 $x_0$ 和新边 $[x_0, x_1]$ 所得的图。由于 $G'$ 有且只有一个非饱和顶点，由交错路引理，$M$ 也是 $G'$ 的最大匹配，且 $T$ 也是 $G'$ 的最小横贯。于是

$$\nu(G') = |M| < |T| = \tau(G')$$

图 $G'$ 有混合点，否则由情况1，可得 $\nu(G') = \tau(G')$，矛盾。由引理1知 $G'$ 含单花。设 $\mu_1$ 为其小扁豆，$b_1$ 为基点。因 $b_1$ 的度大于2，故 $b_1 \neq x_0$。

假设 $G''$ 是在 $G$ 中增加新项点 $y_0$ 和新边 $[y_0, b_1]$ 所得的图。如果 $G''$ 不含混合点，由上分析可得 $\nu(G'') = \tau(G'')$，因而有 $\nu(G) = \tau(G)$，矛盾。

若 $G''$ 含混合点，则沿着从 $y_0$ 开始的交错路的第一个混合点是小扁豆 $\mu_2$ 的基点。显然 $\mu_2$ 与 $\mu_1$ 一起构成 $G$ 的一个双花，这与(3)矛盾。

## 3 可正则超图的分数横贯数

令 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 是 $X$ 上的超图。对于 $k \geq 0$ 的整数，$H$ 中边 $E_i$ 的 $k$ 重边由 $E_i$ 的 $k$ 个拷贝代替 $E_i$。如果 $k = 0$，就意味着在 $H$ 中删除 $E_i$。

若超图 $H$ 中的所有顶点有相同的度，则称 $H$ 是正则的。若将超图 $H$ 的每条边 $E_i$ 用 $k_i \geq 1$ 重边代替后得到一个正则超图，则称 $H$ 是可正则的。若将超图 $H$ 的每条边 $E_i$ 用 $k_i \geq 0$ 重边来代替后得到一个正则超图，则称 $H$ 是拟可正则的。

下面图8给出了具有这些性质的一些图的例子。

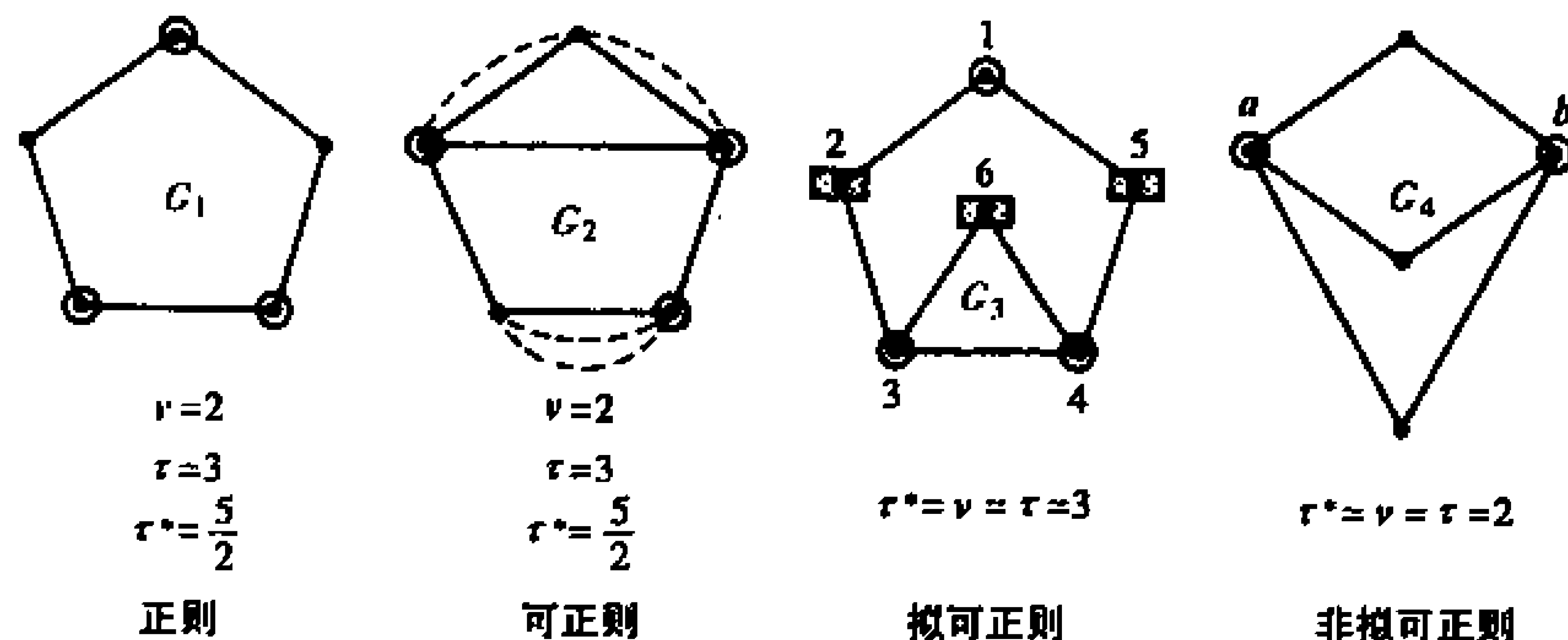



图8

易知，正则 ⇒ 可正则 ⇒ 拟可正则。

**定理7** 令 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 是 $X$ 上的 $n$ 阶 $r$- 一致超图，则下面的两个

性质等价：

(1) $H$ 是拟可正则的

(2) $\tau^*(H) = \frac{n}{r}$

**证** (1)⇒(2)。假设 $H$ 是拟可正则的，则存在一个正则 $s$- 匹配 $H' \subset sH$，用两种不同的方法对 $H'$ 的边的关联图的边数计数，可得 $ns = rm(H')$。故注意到 $t(x) \equiv \frac{1}{r}$ 是 $H$ 的一个分数横贯，于是有

$$\frac{n}{r} = \frac{m(H')}{s} \leqslant \tau^*(H) \leqslant \frac{n}{r}$$

因此 $\tau^*(H) = \frac{n}{r}$。

(2)⇒(1)。令整数 $s \geqslant 1$ 使得

$$\frac{\nu_s(H)}{s} = \max_{k \geqslant 1} \frac{\nu_k(H)}{k}$$

设 $H' \subset sH$ 是一个 $s$- 匹配，使得 $m(H') = \nu_s(H)$。由(2)可得

$$\frac{m(H')}{s} = \frac{\nu_s(H)}{s} = \tau^*(H) = \frac{n}{r}$$

于是 $rm(H') = n\Delta(H')$，故超图 $H'$ 是正则的，从而 $H$ 是拟可正则的。

**注** 在图8中，由于[1,2]，[3,6]，[4,5]是 $G_3$ 的一个完美匹配，故 $G_3$ 是拟可正则的。因为如下定义的函数：

$$t(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{a,b\} \\ 0 & x \in X - \{a,b\} \end{cases}$$

是 $G_4$ 的一个分数横贯，其值为 $2 < \frac{n}{2} = \frac{5}{2}$。故由定理 7 知 $G_4$ 是非拟可正则的。

当超图是一个图时，能获得下面比定理 7 更为细致的结论。

**定理 8** $G$ 是一个 $n$ 阶图，则下列条件相互等价：

(1) $G$ 是拟可正则的

(2) $\tau^*(G) = \frac{n}{2}$

(3) $G$ 含一个部分子图 $H$，其连通分支为 2- 团和奇圈构成

(4) 对 $G$ 的任一独立集 $S$，有 $|\Gamma_G S| \geqslant |S|$

**证** (1)⇒(2)。若 $G$ 是满足(1)的 $n$ 阶图，则存在一个度为 $k$ 的正则多重图 $H$。用两种不同的方法对 $H$ 的关联图的边数计数，可得

$$kn = 2m(H)$$

由于 $t(x) \equiv 1$ 是 $G$ 的一个 2- 横贯，故有

$$\frac{n}{2} = \frac{m(H)}{k} \leqslant \frac{\nu_k(G)}{k} \leqslant \tau^*(G) \leqslant \frac{\tau_2(G)}{2} \leqslant \frac{n}{2}$$

因此,上述等号成立且 $t(x)\equiv 1$ 是一个最优的 2- 横贯。

(2)⇒(3)。令 $G$ 是满足(2) 的一个图,则由定理 2 可得

$$\frac{\nu_2(G)}{2}=\tau^*(G)=\frac{n}{2}$$

于是 $\nu_2(G)=n$,故(3) 成立。

(3)⇒(4)。事实上,对 $G$ 的每个独立集 $S$ 有

$$|\Gamma_G S|\geqslant|\Gamma_H S|\geqslant|S|$$

(4)⇒(1)。令 $G$ 是满足(4) 的一个图。又令 $t(x)$ 是 $G$ 的一个 2- 横贯。则集合 $S=\{x|x\in X,t(x)=0\}$ 是一个独立集,则 $\Gamma_G S\subset\{x|t(x)=2\}$。于是有

$$\sum_{x\in X}t(x)=n+\sum_{x\in X}(t(x)-1)\geqslant n+|\Gamma_G S|-|S|\geqslant n$$

因此 2- 横贯 $t'(x)\equiv 1$ 是最优的,再由定理 2,有

$$\frac{\nu_2(G)}{2}=\frac{\tau_2(G)}{2}=\frac{n}{2}$$

所以 $\nu_2(G)=n$,从而证明了 $G$ 是拟可正则的。

**定理 9** (Fulkerson-McAndrew-Hoffman 定理)　令 $G$ 是一个阶为偶数的连通图,若每一对不相交的奇圈之间一定有一条边连接,则 $G$ 有完美匹配的充要条件是:对 $G$ 的每个独立集 $S$,有

$$|\Gamma_G S|\geqslant|S|$$

**证**　必要性是显然的。充分条件就是定理 8 中的条件(4),故由定理 8,$G$ 有一个部分图,其各连通分支是孤立边或奇圈。因为 $n$ 是偶数,这些奇圈分支可以两两配对且其间有一条边连接,因此 $G$ 有一个完美匹配。

对于可正则二部图,可得到与定理 8 类似的条件。下面用最优 2- 横贯的唯一性来刻画可正则图的性质。还有其他一些刻画,最著名的结果由 Pulleyblank [1980],[1981] 给出。

**定理 10** (Berge [1978])　$G$ 是一个 $n$ 阶连通图,则下面这些陈述等价:

(1) $G$ 是可正则的非二部图;

(2) $\tau^*(G)=\frac{n}{2}$ 且 $t(x)\equiv 1$ 是唯一的一个最优 2- 横贯;

(3) 对 $G$ 的每个独立集 $S$,有 $|\Gamma_G S|>|S|$;

(4) 对每个 $A\subset X,A\neq\emptyset,A\neq X$ 有 $|\Gamma_G A|>|A|$。

**证**　(1)⇒(2)。若 $G$ 满足(1),则通过增加 $G$ 中的一些多重边可得一个正则多重图 $H$。由于可正则超图是拟可正则的,故由定理 8 的条件(2) 可推得 2- 横贯 $t(x)\equiv 1$ 是最优的。

假设存在另一个最优的 2- 横贯 $t'(x)$ 满足 $t'(X)=n$。令

$$A_0=\{x|t'(x)=0\},\qquad A_2=\{x|t'(x)=2\}$$

则 $A_0$ 是独立集。且因为 $t'(X)=n$ 有 $|A_0|=|A_2|$。此外，$\Gamma_G A_0 \subset A_2$，由于 $H$ 是正则的，故有

$$\Delta(H)|A_0| = \sum_{x\in A_0} m_H(x,A_2) = \sum_{x\in A_2} m_H(x,A_0)$$
$$\leqslant \Delta(H)|A_2| = \Delta(H)|A_0|$$

因此以上式子等号成立，所以有 $\Gamma_G A_2 \subset A_0$。由于 $G$ 是连通的，因此，子图 $G[A_0 \cup A_2]$ 就是 $G$，从而 $G$ 是二部图，这与条件相矛盾。故最优 2- 匹配是唯一的。

(2)⇒(3)。令 $S$ 是 $G$ 的一个独立集，则 $2G$ 中存在一个定理 2 中的典型 2- 匹配 $H$。由于 $\nu_2(G)=n$，所以 $G$ 中没有连通分支是孤立点。故有

$$|\Gamma_G S| \geqslant |\Gamma_H S| \geqslant |S|$$

若 $|\Gamma_G S|=|S|$，则可定义另一个横贯 $t'$：

$$t'(x)=\begin{cases}0 & \text{若 } x\in S\\ 2 & \text{若 } x\in \Gamma_G S\\ 1 & \text{若 } x\notin \Gamma_G S\cup S\end{cases}$$

由于 $t'(X)=n$，故 $t'$ 也是最优的，这与 $G$ 中最优 2- 横贯的唯一性相矛盾。因此

$$|\Gamma_G S| > |S|$$

(3)⇒(4)。令 $A$ 是 $X$ 的非空真子集，$S$ 是子图 $G[A]$ 中的孤立点集。若 $S=\emptyset$，又由于 $G$ 是连通的，则 $m_G(A,X-A)\neq\emptyset$。因此 $\Gamma_G A$ 含 $A$ 且至少还包含 $X-A$ 中一个顶点。所以 $|\Gamma_G A|>|A|$。

若 $S\neq\emptyset$，则由(3)有 $|\Gamma_G S|>|S|$。从而有

$$|\Gamma_G A| \geqslant |\Gamma_G S| + |A-S| > |S| + |A-S| = |A|$$

(4)⇒(1)。若 $G$ 是二部图 $G=(X,Y;E)$，不失一般性，设 $|X|\leqslant|Y|$。取 $A=Y$，则 $|\Gamma_G A|=|X|\leqslant|Y|=|A|$，矛盾。故 $G$ 是非二部图[①]。

由 $G$ 来构造一个二部图 $H$：其顶点集合为 $X$ 及 $\bar{X}$ 均为 $G$ 的顶点集的拷贝，两个顶点 $x\in X$，$\bar{y}\in\bar{X}$ 相邻当且仅当 $[x,y]\in E(G)$。则对 $X$ 上的每个非空真子集 $A$，有 $|\Gamma_H A|=|\Gamma_G A|>|A|$。

对 $H$ 的边 $[a,\bar{b}]$，$H$ 中由 $X\cup\bar{X}-\{a,\bar{b}\}$ 导出的子图 $H'$ 满足：$X-\{a\}$ 的任一子集 $A$ 有

$$|\Gamma_{H'} A| = |\Gamma_H A - \{\bar{b}\}| \geqslant |\Gamma_H A| - 1 \geqslant |A|$$

于是由 König 定理，$H'$ 有完美匹配，故 $H$ 中存在包含边 $[a,\bar{b}]$ 的完美匹配。$H$ 中每个完美匹配可诱导出 $G$ 的一个含边 $[a,b]$ 的 2- 匹配 $G_{ab}$，则 $\sum_{ab\in E(G)} G_{ab}$ 是一个正则

---

① 原文中未证明 $G$ 是非二部图。

多重图，故 $G$ 是可正则的。

**定理 11** (Jaeger, Payan [1978]) $G$ 是一个连通无爪图，则 $G$ 是可正则的充要条件是：$G$ 没有悬挂点且不同构于 $G_1$；其中 $G_1$ 是由偶圈 $[0,1,2,\cdots,2p-1,0]$ 中加上某些弦 $[2i,2i+2]$ 所得的图。

**证** 显然 $G_1$ 是无爪的非二部图。它对集合 $S=\{1,3,5,\cdots,2p-1\}$ 满足 $|\Gamma_{G_1}S|=|S|$，因此由定理 10 的条件(3)，$G_1$ 不是可正则的。

反之，假设 $G$ 连通、无爪且不同构于 $G_1$。若 $G$ 有一个独立集 $S$ 满足 $|\Gamma_G S|\leqslant|S|$。若 $x\in S$，因 $G$ 没有悬挂边，$x$ 和 $\Gamma_G S$ 之间的边数 $m_G(x,\Gamma_G S)\geqslant 2$；若 $y\in\Gamma_G S$，因 $G$ 无爪，故 $m_G(y,S)\leqslant 2$。于是有

$$2|\Gamma_G S|\leqslant 2|S|\leqslant\sum_{x\in S}m_G(x,\Gamma_G S)=\sum_{y\in\Gamma_G S}m_G(y,S)\leqslant 2|\Gamma_G S|$$

故上述不等式中等号成立，即

$$|\Gamma_G S|=|S|$$

且对每个顶点 $x\in S$ 和 $y\in\Gamma_G S$ 有

$$m_G(x,\Gamma_G S)=m_G(y,S)=2$$

因此 $G$ 中 $S$ 和 $\Gamma_G S$ 之间的边构成一个偶圈。由于 $G$ 无爪，故 $G$ 只能在 $\Gamma_G S$ 中的某些点对之间加一些边，且增加的边仅能在偶圈中产生三角形。

因此 $G$ 同构于 $G_1$，这与假设矛盾。

从而有 $|\Gamma_G S|>|S|$。由定理 10，图 $G$ 是可正则的且是非二部图。

## 4 贪婪横贯数

$H$ 是简单超图，为了得到基数较小的横贯，我们采用**贪婪算法**：

1. 在 $H_1=H$ 中选取一个度为最大的顶点 $x_1$；
2. 在 $H_2=H_1-H_1(x_1)$ 中选取一个度为最大的顶点 $x_2$；
3. 在 $H_3=H_2-H_2(x_2)$ 中选取一个度为最大的顶点 $x_3$；
4. 继续以上过程。

当 $H_k$ 是一个星，即 $H_k=H_k(x_k)$ 时，则 $T=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ 是 $H$ 的横贯。由贪婪算法所得到的横贯中的最小基数称为**贪婪横贯数**，记为 $\bar{\tau}(H)$。

下面定理的结果分别由 Stein [1974] 和 Lovász [1975] 各自独立给出。

**定理 12** $H$ 是最大度为 $\Delta$ 的超图，则

$$\tau(H)\leqslant\bar{\tau}(H)\leqslant\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\Delta}\right)\max_{H'\subseteq H}\frac{m(H')}{\Delta(H')}\leqslant(1+\log\Delta)\tau^*(H)$$

**证** 令 $T$ 是 $H$ 中由贪婪算法所得到的横贯，满足 $|T|=\bar{\tau}(H)$；$t_\lambda$ 是在算法过程中取最大度为 $\lambda$ 的步数。若 $H$ 的最大度为 $\Delta$，则

$$\tilde{\tau} = |T| = t_1 + t_2 + \cdots + t_{\lambda+1} + \cdots + t_\Delta$$

对 $\lambda < \Delta$,令 $t_\Delta + t_{\Delta-1} + \cdots + t_{\lambda+1} = k$。在第 $k+1$ 步,将在部分超图 $H_{k+1}$ 中选取度最大的顶点 $x_{k+1}$,显然,$\Delta(H_{k+1}) \leqslant \lambda$。通过对剩余边数的估计,可得

$$\lambda t_\lambda + (\lambda-1)t_{\lambda-1} + \cdots + 2t_2 + t_1 = m(H_{k+1}) \leqslant \lambda \frac{m(H_{k+1})}{\Delta(H_{k+1})} \leqslant \lambda \max_{H' \subseteq H} \frac{m(H')}{\Delta(H')}$$

于是有

$$\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda+1}\right)(t_1 + 2t_2 + \cdots + \lambda t_\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda+1} \max_{H' \subseteq H} \frac{m(H')}{\Delta(H')}$$

$$\lambda \in \{1, 2, \cdots, \Delta - 1\}$$

故得到下列不等式:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)t_1 \leqslant \frac{1}{2} \max_{H' \subseteq H} \frac{m(H')}{\Delta(H')}$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)(t_1 + 2t_2) \leqslant \frac{1}{3} \max_{H' \subseteq H} \frac{m(H')}{\Delta(H')}$$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)(t_1 + 2t_2 + 3t_3) \leqslant \frac{1}{4} \max_{H' \subseteq H} \frac{m(H')}{\Delta(H')}$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{1}{\Delta-1} - \frac{1}{\Delta}\right)(t_1 + 2t_2 + \cdots + (\Delta-1)t_{\Delta-1}) \leqslant \frac{1}{\Delta} \max_{H' \subseteq H} \frac{m(H')}{\Delta(H')}$$

$$\frac{1}{\Delta}(t_1 + 2t_2 + \cdots + \Delta t_\Delta) \leqslant \frac{m(H)}{\Delta(H)} \leqslant \max_{H' \subseteq H} \frac{m(H')}{\Delta(H')}$$

将上述不等式两边各自相加,可得左边为 $\sum_{\lambda=1}^{\Delta} t_\lambda$,右边为

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\Delta}\right) \max_{H' \subseteq H} \frac{m(H')}{\Delta(H')} \leqslant (1 + \log\Delta)\tau^*(H)$$

所以

$$\tilde{\tau}(H) = \sum_{\lambda=1}^{\Delta} t_\lambda \leqslant (1 + \log\Delta)\tau^*(H)$$

**应用(图的分数边色数)**　考虑无环多重图 $G$,它的分数边色数定义为

$$q^*(G) = \min_{k \geqslant 1} \frac{q(kG)}{k}$$

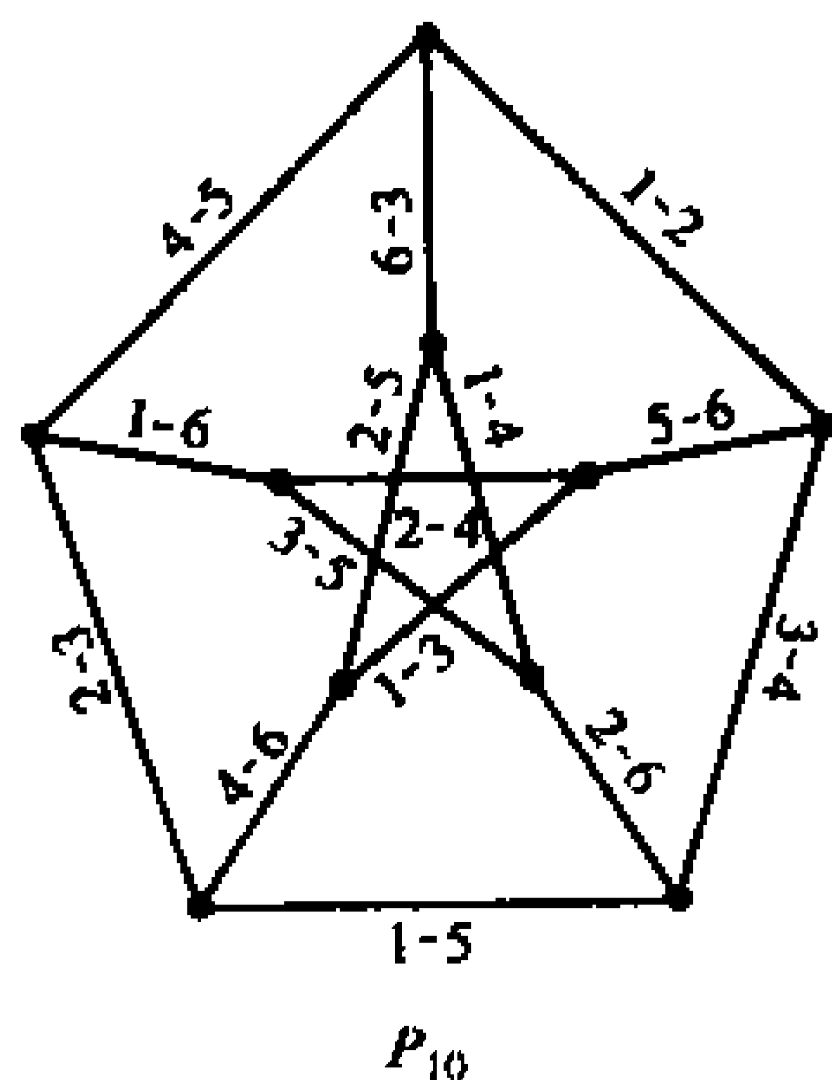
显然 $q^*(G) \geqslant \Delta(G)$。

对 Petersen 图 $P_{10}$,有 $q(2P_{10}) = 6$(见图 9),所以

$$q^*(P_{10}) = \frac{q(2P_{10})}{2} = 3 = \Delta(P_{10})$$

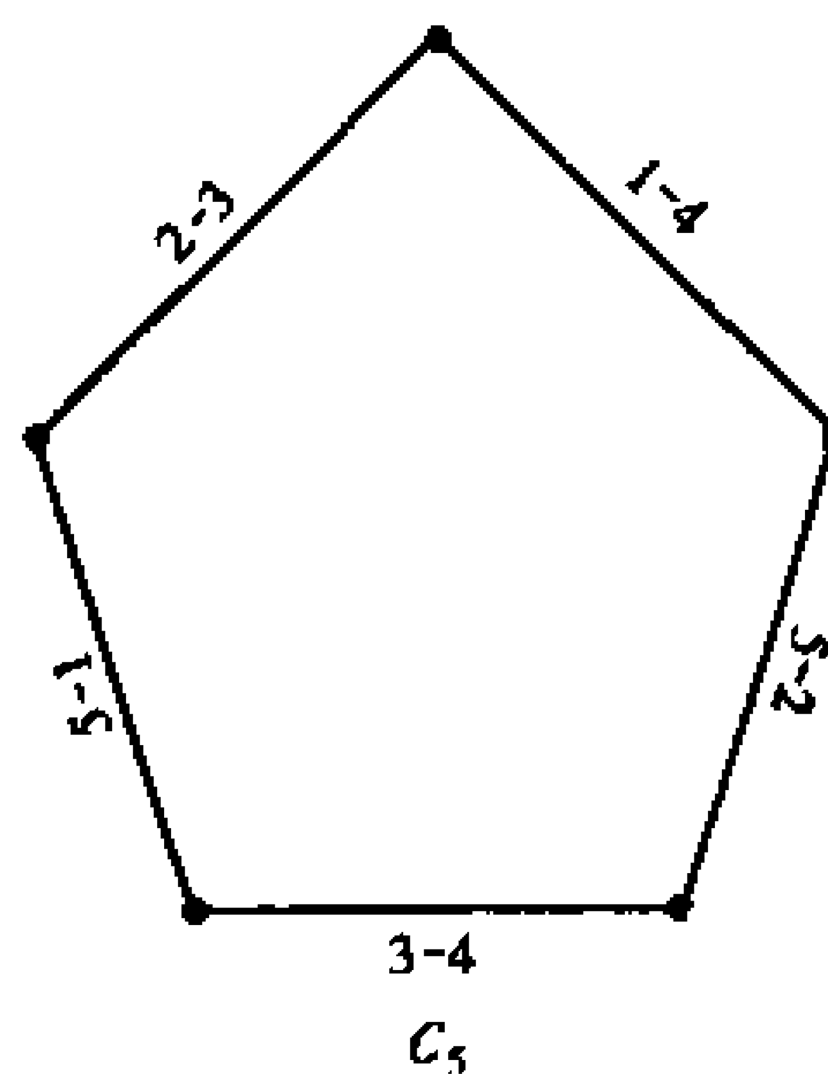
对于奇圈 $C_5$,有 $q(2C_5) = 5$,所以 $q^*(C_5) = \frac{5}{2}$(见图 10)。一般地,有 $q^*(C_{2p+1}) = 2 + \frac{1}{p} > \Delta(G)$。

为了得到 $q^*(G)$ 的上界和下界,考虑超图 $H=(\bar{E}_1,\bar{E}_2,\cdots,\bar{E}_m)$,其中 $G$ 的在包含意义下的极大匹配作为 $H$ 的顶点,边 $\bar{E}_i$ 是含在 $G$ 中边 $e_i$ 的这些极大匹配集合。



$P_{10}$

图 9



$C_5$

图 10

显然,$e_i\cap e_j=\varnothing$ 当且仅当 $\bar{E}_i\cap\bar{E}_j\neq\varnothing$。对 $H$ 的一个最小横贯 $T=\{M_1,M_2,\cdots\}$,可定义 $G$ 的一个最优边着色:$M_1$ 的边着1色,$M_2-M_1$ 的边着2色,…,$M_i-(M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_{i-1})$ 的边着 $i$ 色,…;$H$ 的一个最小 $k$-横贯 $t(M)$ 定义 $kG$ 的一个色集合为 $\sum t(M_i)$ 的最优边着色;每个匹配 $M_i$ 对应 $t(M_i)$ 相异色集合。因此有

$$m(H)=m(G)$$
$$\tau(H)=q(G)$$
$$\tau_k(H)=q(kG)$$
$$\tau^*(H)=q^*(G)$$
$$\Delta(H)=\nu(G)$$

若用 $\Delta_0(G)$ 表示 $G$ 中边交簇的最大边数,则

$$\nu(H)=\Delta_0(G)$$

由定理1和定理12可得

$$\Delta_0(G)\leqslant\max_{G'\subseteq G}\frac{m(G')}{\nu(G')}\leqslant q^*(G)\leqslant q(G)\leqslant(1+\log\nu(G))q^*(G)$$

令

$$\mathscr{A}=\{A\mid A\subseteq X,|A|\geqslant 3,|A|\text{为奇数}\}$$

通过 $\mathscr{A}$ 对上述不等式可得更精确的结果

$$q^*(G)\geqslant\max_{G'\subseteq G}\frac{m(G')}{\nu(G')}\geqslant\frac{m(G[A])}{\nu(G[A])}\geqslant\frac{m(G[A])}{\frac{1}{2}(|A|-1)}\qquad(\forall A\in\mathscr{A})$$

此外,

$$q^*(G) \geqslant \Delta_0(G) \geqslant \Delta(G)$$

于是有

(1) $q^*(G) \geqslant \max\left\{\Delta(G), \max_{A\in\mathscr{A}} \frac{2m(G[A])}{|A|-1}\right\}$

Seymour [1978] 证明了对多重图 $G$,(1) 中等式成立。

## 5 Ryser 的猜测

下面研究参数 $\tau^*(H)$、$\nu(H)$ 和 $\tau(H)$ 之间的关系。当 $r = 2$ 时,定理 5 的推论 2 可改写为如下形式:

**定理 13** 若 $G$ 是 2- 一致超图,则

(0) $\tau^*(G) \leqslant \frac{3}{2}\nu(G) = \frac{r^2-r+1}{r}\nu(G)$

且(0) 中等号成立当且仅当 $G$ 是两两不相交的一些三角形之并。

当 $r > 2$ 时,有下面一个类似的结果:

**定理 14** (Furedi [1981]) $H$ 是 $r$- 一致超图,$r \geqslant 3$,则

(1) $\tau^*(H) \leqslant \frac{r^2-r+1}{r}\nu(H)$

(1) 中等号成立当且仅当 $H$ 是若干个两两不相交的秩为 $r$ 的射影平面的并。此外,若 $H$ 不含 $p+1$ 个两两不交的秩为 $r$ 的射影平面,则

(2) $\tau^*(H) \leqslant (r-1)\nu(H) + \frac{p}{r}$

若 $H$ 是 $k$ 个秩为 $r$ 的射影平面 $P_r$ 的并,则有 $\nu(H) = k$。由定理 7 可得

$$\tau^*(P_r) = \frac{n(P_r)}{r} = \frac{r^2-r+1}{r}$$

故

$$\tau^*(H) = \frac{r^2-r+1}{r}k = \frac{r^2-r+1}{r}\nu(H)$$

由于当 $r = 2$ 时,$\tau^*(C_5) = 2.5 \neq (r-1)\nu(C_5)$,故 $r = 2$ 时,(2) 不成立。

**推论 1** 设 $H$ 是 $r$- 一致交超图,则

(3) $\Delta(H) \geqslant \frac{r}{r^2-r+1}m(H)$

(3) 中等号成立当且仅当 $H$ 是 $K_3$ 或秩为 $r \geqslant 3$ 的射影平面。

**证** 由于 $\nu(H) = 1$,由定理 13 和 14 可得

$$\frac{m(H)}{\Delta(H)} \leqslant \tau^*(H) \leqslant \frac{r^2-r+1}{r}$$

若 $H$ 是 $K_3$ 或秩为 $r \geqslant 3$ 的射影平面,则由定理 7 得

$$\tau^*(H) = \frac{n}{r} = \frac{m(H)}{\Delta(H)}$$

故有

$$\frac{m(H)}{\Delta(H)} = \frac{r^2 - r + 1}{r}$$

若 $H$ 是其他情况，则由定理 13 和 14，不等式(3) 是严格的。

**推论 2**　设 $H$ 是 $n$ 阶正则 $r$- 一致超图，则

(4) $\nu(H) \geqslant \frac{n}{r^2 - r + 1}$

(4) 中等号成立当且仅当 $H$ 是 $\nu(H)$ 个秩为 $r \geqslant 3$ 的两两不相交的射影平面的并或 $\nu(H)$ 个两两不相交的三角形。

**证**　由定理 7，有

$$\tau^*(H) = \frac{n}{r}$$

再由定理 13 和 14，立即可得所需结论。

推论 2 曾是 Bollobás，Erdös 的一个猜测。Bollobás，Eldridge [1976] 证明了 $r = 2$ 的情形。

**推论 3**　$H$ 是 $r$- 一致超图，它不含秩为 $r \geqslant 3$ 的射影平面作为 $H$ 的部分子超图，则

$$\tau^*(H) \leqslant (r-1)\nu(H)$$

特别对那些不存在秩为 $r$(如 $r = 7$) 的射影平面的 $r$ 值，上述不等式成立。

**推论 4**　设 $H$ 是一个 $r$- 部一致超图，则

$$\tau^*(H) \leqslant (r-1)\nu(H)$$

**证**　当 $r = 2$ 时，$H$ 是二部图，有

$$\tau^*(H) = \tau(H) = \nu(H) = (r-1)\nu(H)$$

当 $r \geqslant 3$ 时，$H \subset K^r_{n_1, n_2, \cdots, n_r}$。易知完全 $r$- 部超图不含秩为 $r$ 的射影平面，因此 $H$ 也不可能含有秩为 $r$ 的射影平面，故由推论 3，有

$$\tau^*(H) \leqslant (r-1)\nu(H)$$

显然，对于二部图 $G$，由 König 定理可得更强的不等式

$$\tau(G) \leqslant (r-1)\nu(G)$$

据此，Ryser [1970] 给出如下猜测：

**Ryser 的猜测**　每个 $r$- 部超图 $H$ 满足

$$\tau(H) \leqslant (r-1)\nu(H)$$

**注**　Frankl 和 Füredi [1983] 利用定理 13 和 14，给出了以 $r$ 为变量的函数 $\frac{m(H)}{\Delta(H)}$ 的上界。它推广了 Chvátal，Hansen 的定理[1976]($r = 2$ 情形) 和 Bollobás 的

定理[1977]($r = 3$ 的情形)。

# 6 积超图的横贯数

给定 $X$ 上的超图 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 和 $Y$ 上的超图 $H' = (F_1, F_2, \cdots, F_{m'})$,定义它们的**积超图**为 $H \times H'$,其中笛卡儿积 $X \times Y$ 作为它的顶点集,$E_i \times F_j$ $(1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant m')$ 作为它的边。$H \times H'$ 的阶为 $n(H \times H') = n(H) \cdot n(H')$,秩为 $r(H \times H') = r(H) r(H')$。

许多组合问题将涉及到积超图的参数 $\nu, \tau$ 和 $\chi$。

**例 1** 极分划 (Erdös, Rado [1956]) 考虑平面上整点集 $I(p,q) = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x \leqslant p, 1 \leqslant y \leqslant q\}$。求最大的整数 $P(p,q,r,s)$,它满足用 $P(p,q,r,s)$ 色对 $I(p,q)$ 任意地着色,总存在同色的 $rs$ 个点落在 $r$ 列和 $s$ 行的交点上。$P(p,q,r,s)$ 恰好是 $\chi(K_q^r \times K_q^s) - 1$,其中 $\chi(H)$ 是 $H$ 的色数(见第 4 章)。例如:$\chi(K_4^2 \times K_6^2) = 2$,下图给出对 $I(4,5)$ 的一个 2- 着色。

$$4\left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right.$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{6}$$

图中没有元素全相等的 $2 \times 2$ 子阵列。因此,

$$P(6,4,2,2) = \chi(K_4^2 \times K_6^2) - 1 = 2 - 1 = 1$$

色数 $\chi(K_p^r \times K_q^s)$ 分别被 Erdös 和 Rado [1956], Chvátal [1969], Reiman [1958] 和 Sterboul [1972], [1983] 作过研究。

**例 2** (Zarankiewicz 数[1951]) 1951 年 Zarankiewicz 提出如下问题:求一个最小整数 $z$ 满足:在每个恰好有 $z$ 个元素为 1 的 $q \times p(0,1)$- 矩阵中总含一个全 1 的 $s \times r$ 子矩阵,这个数记为 $Z(p,q,r,s)$,称它为 **Zarankiewicz 数**。关于这个数有丰富的文献可参考(如 Guy [1969], Sterboul [1983])。若 $\alpha(H)$ 表示超图 $H$ 的独立数(见第 4 章),有

$$Z(p,q,r,s) = \alpha(K_p^r \times K_q^s) + 1 = pq + 1 - \tau(K_p^r \times K_q^s)$$

**例 3** (Hales [1973]) 在矩形 $\{1 \leqslant x \leqslant p, 1 \leqslant y \leqslant q\}$ 中,至少要取多少个整点 $(x,y)$ 才能保证每个单位正方形至少含一个上述顶点?若 $P_n$ 表示 $n$ 个顶点的路,则上述问题的答案是

$$\tau(P_p \times P_q) = \left[\frac{p}{2}\right] \times \left[\frac{q}{2}\right]$$

**定理 15** 令 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 和 $H' = (F_1, F_2, \cdots, F_{m'})$ 是分别定义在

$X$ 和 $Y$ 上的两个超图，则有

$$\nu(H)\nu(H') \leqslant \nu(H\times H') \leqslant \tau^*(H)\nu(H') \leqslant \tau^*(H)\tau^*(H')$$
$$= \tau^*(H\times H') \leqslant \tau^*(H)\tau(H') \leqslant \tau(H\times H')$$
$$\leqslant \tau(H)\tau(H')$$

**证**　1. 若 $\{E_i|i\in I\}$ 和 $\{F_j|j\in J\}$ 分别是 $H$ 和 $H'$ 的最大匹配，则对 $(i,j)$，$(i',j')\in I\times J$，$(i,j)\neq(i',j')$，有

$$(E_i\times F_j)\cap(E_{i'}\times F_{j'})=\varnothing$$

因此，$\{E_i\times F_j|i\in I,j\in J\}$ 是 $H\times H'$ 的一个匹配，故

$$\nu(H)\nu(H')=|I||J|\leqslant \nu(H\times H')$$

2. 设 $\{E_i\times F_j|(i,j)\in K\}$ 是 $H\times H'$ 的最大匹配，令

$$z(E_i)=\frac{1}{\nu(H')}|\{j|(i,j)\in K\}|$$

因为

$$\sum_{E\in H(x)} z(E)=\frac{1}{\nu(H')}|\{E_i\times F_j|E_i\in H(x),(i,j)\in K\}|$$
$$\leqslant \frac{\nu(H')}{\nu(H')}=1$$

故 $z(E_i)$ 是 $H$ 的一个分数匹配。因此

$$\nu(H\times H')=|K|=\sum_i z(E_i)\nu(H')\leqslant \tau^*(H)\nu(H')$$

3. 由定理 1，可得

$$\tau^*(H)\nu(H')\leqslant \tau^*(H)\tau^*(H')$$

4. 设 $q(E)$ 和 $q'(F)$ 分别是 $H$ 和 $H'$ 的分数匹配。令 $z(E\times F)=q(E)\times q'(F)$，由于

$$\sum_{\substack{E\in H(x)\\F\in H'(y)}} z(E\times F)=\sum_{E\in H(x)}q(E)\sum_{F\in H'(y)}q'(F)\leqslant 1$$

故 $z(E\times F)$ 是 $H\times H'$ 的分数匹配。因此

$$\tau^*(H\times H')\geqslant \sum_{i,j}z(E_i\times F_j)=\sum_i q(E_i)\sum_j q'(F_j)=\tau^*(H)\tau^*(H')$$

为了证明反向不等式，令 $t(x)$ 和 $t'(y)$ 分别是 $H$ 和 $H'$ 的最优分数横贯，令 $p(x,y)=t(x)t'(y)$，由于

$$\sum_{(x,y)\in E_i\times F_j} p(x,y)=\sum_{x\in E_i}t(x)\sum_{y\in F_j}t'(y)\geqslant 1$$

故函数 $p(x,y)$ 是 $H\times H'$ 的分数横贯。于是有

$$\tau^*(H\times H')\leqslant \sum_{x,y}p(x,y)=\sum_x t(x)\sum_y t'(y)=\tau^*(H)\tau^*(H')$$

故有

$$\tau^*(H\times H')=\tau^*(H)\tau^*(H')$$

5. 由定理 1，可得

$$\tau^*(H \times H') = \tau^*(H)\tau^*(H') \leqslant \tau^*(H)\tau(H')$$

6. 类似 2.，可证明

$$\tau^*(H)\tau(H') \leqslant \tau(H \times H')$$

7. 类似 1.，可证明

$$\tau(H \times H') \leqslant \tau(H)\tau(H')$$

**推论** (McEliece, Posner [1971]) 超图 $H$ 满足

$$\tau^*(H) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\tau(H^k)}$$

其中，$H^k = H \times H \times \cdots \times H$ 是 $k$ 个 $H$ 的积。

**证** 由定理 12 可得

$$\tau^*(H)^k = \tau^*(H^k) \leqslant \tau(H^k) \leqslant [1 + \log\Delta(H^k)]\tau^*(H^k) \leqslant [1 + k\log\Delta(H)]\tau^*(H)^k$$

易证 $[1 + k\log\Delta(H)]^{1/k} \to 1\ (k \to \infty)$。故由上式，结论成立。

由 Berge 和 Simonovits [1972] 给出定理 15 的加强结论。

**定理 16** 超图 $H$ 满足

$$\tau^*(H) = \min_{H'} \frac{\tau(H \times H')}{\tau(H')}$$

**证** 由定理 15，有

$$\tau^*(H) \leqslant \min_{H'} \frac{\tau(H \times H')}{\tau(H')}$$

下面证明反向不等式。首先由定理 1 知存在整数 $k$ 满足 $\tau^*(H) = \frac{\tau_k(H)}{k}$。令 $t(x)$ 是 $H$ 的一个最优 $k$-横贯，令 $Y$ 为基数是 $p = \tau_k(H)$ 的集合。给 $Y$ 的一个划分 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 满足 $|Y_i| = t(x_i)\ (i = 1,2,\cdots,n)$，则 $Y$ 上的超图 $H' = K_p^{p-k+1}$ 满足 $\tau(H') = k$。考察集合

$$\bar{T} = \bigcup_{i=1}^{n} (\{x_i\} \times Y_i)$$

则对 $H$ 的每条边 $E$，有

$$|(E \times Y) \cap \bar{T}| = \sum_{x\in E} t(x) \geqslant k$$

另外，由于 $H'$ 的每条边 $F$ 的基数是 $p - k + 1$，由鸽笼原理，$E \times F$ 与 $\bar{T}$ 相交。于是有

$$\tau(H \times H') \leqslant |\bar{T}| = |Y| = \tau_k(H)$$

所以有

$$\frac{\tau(H \times H')}{\tau(H')} \leqslant \frac{\tau_k(H)}{k} = \tau^*(H)$$

**定理 17**　每一个具有 Helly 性质的超图 $H$ 满足:

$$\tau^*(H) = \max_{H'} \frac{\nu(H \times H')}{\nu(H')}$$

**证**　由定理 15,有

$$\tau^*(H) \geqslant \max_{H'} \frac{\nu(H \times H')}{\nu(H')}$$

下面证明反向不等式。由定理 1 知,存在整数 $s$ 使得 $\tau^*(H) = \frac{\nu_s(H)}{s}$。令 $H_0 = (E_k \mid k \in K)$ 是 $H$ 的一个最大 $s$- 匹配,则 $|K| = \nu_s(H)$ 和 $\Delta(H_0) = s$。

令 $Y$ 是 $H_0$ 中最大匹配构成的集簇。对 $k \in K$,令 $F_k$ 为 $H_0$ 中包含 $E_k$ 的最大匹配所组成的集簇。因为 $H$ 具有 Helly 性质,故 $Y$ 上的超图 $H' = \{F_k \mid k \in K\}$ 满足 $\nu(H') \leqslant \Delta(H_0) = s$。因为 $(E_k \times F_k) \cap (E_{k'} \times F_{k'}) \neq \varnothing$ 当且仅当 $E_k \cap E_{k'} \neq \varnothing$ 和 $F_k \cap F_{k'} \neq \varnothing$,所以 $\{E_k \times F_k \mid k \in K\}$ 是超图 $H \times H'$ 的一个匹配。因此

$$\nu(H \times H') \geqslant |K| = \nu_s(H) = s\tau^*(H)$$

所以

$$\frac{\nu(H \times H')}{\nu(H')} \geqslant \frac{s\tau^*(H)}{s} = \tau^*(H)$$

下面把超图的积、数 $P(p,q,2,2) = \chi(K_p \times K_q) - 1$(见例 1) 及 Ramsey 数 $R(p,q)$ 联系起来。已知 $R(p,q) \leqslant \binom{p+q-2}{p-1}$。除少数几个特殊的 $p,q$ 值外,$R(p,q)$ 的值是未知的。

**定理 18**　对任意正整数 $p,q$,有

$$\max_{\substack{\chi(H) \leqslant p \\ \chi(H') \leqslant q}} \chi(H \times H') = \chi(K_p \times K_q)$$

这里对所有无环超图 $H$ 和 $H'$ 取最大值。

**证**　令 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 是 $X$ 上的无环超图且 $\chi(H) \leqslant p$,$H' = (F_1, F_2, \cdots, F_{m'})$ 是 $Y$ 上的无环超图且 $\chi(H') \leqslant q$。关于 $H$ 有一个 $p$- 着色 $g(x) \in \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$。$H'$ 有一个 $q$- 着色 $g'(y) \in \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q\}$。下面将证明对 $H \times H'$ 的顶点有一个 $\chi(K_p \times K_q)$- 着色。

令 $K_p$ 是顶点集为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$ 的完全图,$K_q$ 是顶点集为 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q\}$ 的完全图。$F(\alpha,\beta) \in \{1,2,\cdots,\chi(K_p \times K_q)\}$ 为 $K_p \times K_q$ 的一个最优着色。于是四个顶点 $\alpha_j\beta_j, \alpha_j\beta_k, \alpha_k\beta_j, \alpha_k\beta_k$ 不会着同色。令 $\Phi(x,y) = F(g(x), g'(y))$。因为 $|E_i| > 1$, $|F_j| > 1$,故存在 $x_1, x_2 \in E_i$, $y_1, y_2 \in F_j$,使得 $g(x_1) \neq g(x_2)$, $g'(y_1) \neq g'(y_2)$。所以,$E_i \times E_j$ 关于 $\Phi$ 不是单色的,因此 $\Phi$ 是 $H \times H'$ 的一个 $\chi(K_p \times K_q)$- 着色,即

$$\chi(H \times H') \leqslant \chi(K_p \times K_q)$$

而当 $H = K_p$, $H' = K_q$ 时,上述等号成立。

**定理 19** (Erdös, McEliece, Taylor [1971], 在此之前已由 Hedrlin [1966] 给出)

$$\max_{\substack{\nu(H)\leqslant p\\ \nu(H')\leqslant q}} \nu(H\times H') = R(p+1,q+1)-1$$

**证** 1. 首先由 $\nu(H)\leqslant p,\nu(H')\leqslant q$ 可以推出

$$\nu(H\times H')\leqslant R(p+1,q+1)-1$$

不然存在超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 和 $H'=(F_1,F_2,\cdots,F_{m'})$,有

$$m_0=\nu(H\times H')\geqslant R(p+1,q+1)$$

令 $\{E_i\times E_j \mid (i,j)\in M\}$ 是 $H\times H'$ 的一个最大匹配,且 $|M|=m_0$。考察 $M$ 上的 $K_{m_0}$:若 $E_i\cap E_{i'}=\varnothing$,其边 $[(i,j),(i',j')]$ 着红色;否则其边着蓝色。由于 $|M|=m_0\geqslant R(p+1,q+1)$,故在 $K_{m_0}$ 中或含一个红色的 $(p+1)$- 团,于是有 $\nu(H)>p$;或者含一个蓝色的 $(q+1)$- 团,于是有 $\nu(H')>q$,上述均得到矛盾。

2. 考察 $M=\{1,2,\cdots,m\}$ 上的 $K_m$,其中 $m=R(p+1,q+1)-1$。由 Ramsey 数定义,存在 $K_m$ 的一个 2- 边着色,诱导出两个部分子图 $G$ 和 $G'$,使得 $\omega(G)\leqslant q$ 和 $\omega(G')\leqslant p$。

考察对偶超图 $H=G^*$,则有

$$\nu(H)=\omega(\bar{G})=\omega(G')\leqslant p$$

类似考察对偶超图 $H'=(G')^*$,有 $\nu(H')\leqslant q$。则由 1. 的证明,有

$$\nu(H\times H')\leqslant R(p+1,q+1)-1$$

对 $M$ 中两个不同的足标 $i,j$,$E_i\times F_i$ 和 $E_j\times F_j$ 是不相交的,所以在超图 $H\times H'$ 中 $\{E_i\times F_i \mid i\in M\}$ 是一个匹配。故有

$$\nu(H\times H')\geqslant |M|=R(p+1,q+1)-1$$

因此,$\nu(H\times H')=R(p+1,q+1)-1$。故定理成立。

**应用**(图的 Shannon 容量) 两个简单图 $G=(X,E)$ 和 $G'=(Y,F)$ 的正规积 $G\times G'$ 是定义在 $X\times Y$ 上的一个图,两个顶点 $(x,y)$ 和 $(x',y')$ 在 $G\times G'$ 中相邻当且仅当

$$x=x' \quad 且 \quad [y,y']\in F$$
$$或 [x,x']\in E, \quad 且 \quad y=y'$$
$$或 [x,x']\in E, \quad 且 \quad [y,y']\in F$$

Shannon 对图的正规积的独立数进行了有意义的研究。若 $G$ 是以接收信号集 $X$ 为顶点集的混淆图,$G'$ 是接收信号集 $Y$ 上的混淆图,则 $\bar{\alpha}(G\times G')$ 表示在接收中不会混淆的字 $xy$ 的最大数目,其中 $x\in X,y\in Y$。也可以考虑 $k$ 个信号的字构成的码均取自 $X$,则可区别的字的最大数目是 $\bar{\alpha}(G^k)$,其中 $G^k=G\times G\times\cdots\times G$ 是 $k$ 个 $G$ 的正规积。

Shannon 定义容量如下:

$$c(G)=\max_k \sqrt[k]{\bar{\alpha}(G^k)}$$

对一切 $k$，可得

$$\bar{\alpha}(G) \leqslant \sqrt[k]{\bar{\alpha}(G^k)} \leqslant c(G) \leqslant \sqrt[k]{Q(G^k)} \leqslant \theta(G)$$

求 $c(G)$ 是困难的(Lovász 在 1979 年证明了 $c(C_5) = \sqrt{5}$)。

令 $H(G)$ 为由 $G$ 的极大团作为边所构成的超图，用 $\overline{H}(G)$(简记为 $\overline{H}$) 表示 $H(G)$ 的对偶超图，则

$$n(G) = m(\overline{H})$$
$$\omega(G) = \Delta(\overline{H})$$
$$\bar{\alpha}(G) = \nu(\overline{H})$$
$$\theta(G) = \tau(\overline{H})$$

用 $G$ 的团作 $q$- 覆盖的最小值是

$$\theta_q(G) = \tau_q(\overline{H})$$

还有

$$\bar{\alpha}(G^k) = \nu[\overline{H}(G^k)] = \nu(\overline{H}^k)$$
$$\theta(G^k) = \tau[\overline{H}(G^k)] = \tau(\overline{H}^k)$$

显然，$\sqrt[k]{\bar{\alpha}(G^k)} \to c(G)$。利用定理 15 的推论，还有

$$\sqrt[k]{\theta(G^k)} \to \tau^*(\overline{H})$$

## 习　题　3

1.(§1)　证明：$\frac{\tau_k(H)}{k} \to \tau^*(H)$。

提示：利用 Fekete 的定理的结论：若数列 $(u_k)$ 具有次可加性，即 $u_{k+h} \leqslant u_k + u_h$，则 $\frac{u_k}{k} \to \inf \frac{u_k}{k}$。

2.(§1)　类似证明：$\frac{\nu_k(H)}{k} \to \tau^*(H)$。

3.(§1)　证明：若对某一整数 $k$ 有 $\frac{\tau_k(H)}{k} = \tau(H)$，则对任给整数 $p \leqslant k$ 有 $\frac{\tau_p(H)}{p} = \tau(H)$。

4.(§1)　证明：若对某一整数 $k$ 有 $\frac{\tau_k(H)}{k} = \tau^*(H)$，则对任给整数 $s$ 有 $\frac{\tau_{ks}(H)}{ks} = \tau^*(H)$。

5.(§3)　令 $X$ 是直线上有限点集合，$H$ 是 $X$ 上的区间超图。证明 $H$ 是可正则的充要条件是：不存在两个相异点 $x, y \in X$ 满足 $H(x) \subset H(y)$ 和 $H(x) \neq$

$H(y)$。

6.(§3) 设 $H$ 是一个 $r$- 一致超图,满足由不同的 $I_x=\bigcap_{E\in H(x)}E$ 构成 $X$ 的一个分划,且每一条与 $I_x$ 相交的边总包含 $I_x$。证明:若对每个 $x$,$H-H(x)$ 是拟可正则的,则 $H$ 是可正则的(Berge [1978],Pulleyblank [1977] 对 $H$ 是图的情况作了研究)。

7.(§3) 设 $H$ 是没有度为 1 的顶点的 $r$- 一致超图,且 $H$ 中每条边至少与其他 $r$ 条边相交。证明:$L(H)$ 是可正则的(Berge [1978])。

8.(§3) 设 $G$ 是连通、非二部的可正则图。证明:每个 $G$ 的母图也是可正则的。

提示:利用定理 10 的条件(3)。

9.(§5) $H$ 是 $n$ 阶 $m$ 条边的 $r$- 一致可正则线性超图,但不含 $r$ 阶射影平面作为它的部分子超图。证明:$\nu(H)\geqslant\frac{m}{n-1}$。在这种情况下,我们有一个比第 2 章定理 8 中结果更好的上界。

10. Aharoni, Erdös 和 Linial [1988] 证明了对每个超图 $H$ 满足:

$$\nu(H)\geqslant\frac{[\tau'(H)]^2}{m(H)}$$

对第 2 章 §4 中不具有 König 性质的例子,验证上述有意义的不等式成立。

# 参 考 文 献


Aharoni R., Matchings in $n$-partite $n$-graphs, *Graphs and Combinatorics* 1, 1985, 303~304.

Aharoni R., P. Erdös, and N. Linial, Optima of dual integer linear programs, *Combinatorica* 8 (1), 1988, 13~20.

Balas E., Integer and fractional matchings, *Studies in Graphs and Discrete Programming*, (P. Hansen, ed.), *Annals of Discrete Math*. 11, 1981, 1~13.

Balinski M., On the maximum matching, minimum covering, Proc. Princeton Symposium on Math. Programming, (H. W. Kuhn, ed.), Princeton University Press, 1970, 301~312.

Berge C., Two theorems in Graph Theory, *Proc. Nat. Acad. Sciences U. S. A*. 43, 1957, 842.

Berge C., Regularisable Graphs, *Advances in Graph Theory*, (Bollobás, ed.), *Annals of Discrete Math*. 3, 1978, 11~20.

Berge C., Théorie fractionnaire des graphes, *Actes Coll. C. N. R. S.* Grenoble 1978 (Benzaken) Grenoble 1979.

Berge C., Packing problems and hypergraph theory, *Ann. Discrete Math*. 4, 1979, 3~37.

Berge C., and P. Duchet, Une généralisation du théorème de Gilmore, *Cahiers Centre d' Etudes de Rec. Opér*. 17, 1975, 117~124.

Berge C., and A. Hoffman, Multicolorations dans les hypergraphes unimodulaires et matrices dont les coefficients sont des ensembles, *Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes*, Colloque d'Orsay 1976, Editions du C. N. R. S., Paris 1978.

Berge C., and M. Simonovits, The coloring numbers of the direct product of two hypergraphs, *Hypergraph Seminar*, 1972 (Berge, Ray-Chaudhuri, eds.), Springer Verlag, Lecture Notes 411, 21~23.

Bollobás B., Disjoint triples in a 3-graph with given maximal degree, *Quart. J. Math. Oxford* 28, 1977, 81~85.

Bollobás B., and A. G. Thomason, Uniquely partitionable graphs, *London Math. Soc*. 16, 1977, 403~440.

Bollobás B., and A. G. Thomason, *Private communication*, 1977.

Brouwer A. E., and A. Schrijver, The blocking number of an affine space, *Publ. Math. Centrum Amsterdam* 1976.

Brualdi R., and T. H. Foregger, Packing boxes with harmonic bricks, *J. Comb. Theory B*, 17, 1974, 81~114.

Chvátal V., On finite polarised relations, *Canad. J. Math. Bull*. 12, 1969, 321~326.

Chvátal V., and D. Hanson, Degrees and matchings, *J. Comb. Theory B*, 20, 1976, 129~138.

Deming R. W., Independence numbers of graphs-An extension of the König-Ergevary theorem, *Discrete Math*. 27, 1979, 23~24.

Edmonds J., Maximum matchings and a polyhedron with (0,1) vertices, *J. Res. Nat. Bureau of Standards*, *B* 69, 1965, 125~130.

Erdös P., On extremal problems of graphs and generalized graphs, *Israel J. Math*. 2, 1964, 183~190.

Erdös P., and R. Rado, A partition calculus in set theory, *Bull. Amer. Math. Soc*. 62, 1956, 427~489.

Erdös P., Chao-Ko, and R. Rado, Intersection theorems for systems of finite sets, *Quart. J. Math*. 12, 1961, 313~320.

Erdös P., R. J. McEliece, and H. Taylor, About Ramsey numbers, *Pacific J. Math*. 37, 1971, 45~46.

Frankl P., and Füredi, Disjoint $r$-tuples in a $r$-graph, *Quart. J. Math. Oxford* 34, 1983, 423~426.

Füredi Z., Maximum degrees and fractional matchings in uniform hypergraphs, *Combinatorica* 1, 1981, 155~162.

Guy R. K., A many-facetted problem of Zarankiewicz, *The Many Facets of Graph Theory*, Lecture Notes in Math 110, Springer-Verlag, Berlin 1969, 129~148.

Hajós G., G. Katona, and D. Szasz, Solution of problem 119, *Math. Lapok* 13, 1962, 214~217.

Hales R. S., Numerical invariants and the strong product of graphs, *J. Comb. Theory B*, 15, 1973, 146~155.

Hedrlin Z., An application of the Ramsey theorem to the topololgical product, *Bull. Acad. Sci. Poland* 14, 1966, 25~26.

Henderson J. R., and R. A. Dean, The 1-width of (0,1)-matrices having constant sum three, *J. Comb. Theory A*, 16, 1974, 355~370.

Kövary T., V. T. Sós, and P. Turán, On a problem of K. Zarankiewicz, *Colloq. Math*. 3, 1954, 50~57.

Lovász L., 2-matchings and 2-covers of hypergraphs, *Acta Math. Ac. Sci. Hungar*. 16, 1975, 433~444.

Lovász L., On the ratio of optimal integral and fractional covers, *Discrete Math*. 13, 1975, 383~390.

McEliece R. J., and E. C. Posner, Hide and seek, *Ann. Stat*. 42, 1971, 1706~1716.

McKey K., General numeric measures and the Kronecker product of graphs, Thesis, Pennsylvania State Univ., June 1973.

Möhrs M., A new result on Zarankiewicz problem, *J. Comb. Theory A*, 31, 1981, 126~130.

Mühlbacker J. R., F. X. Steinparz, and G. Tinhofer, On certain classes of fractional matchings, *Discrete Appl. Math*. 9, 1984, 235~244.

Naddef D., Rank of maximum matchings in a graph, *Math. Programming* 22, 1982, 52~70.

Nemhauser G. L., and L. E. Trotter, Vertex packings, *Math. Programming* 8, 1975, 232~248.

Nemhauser G. L., and L. E. Trotter, Properties of vertex packings, *Math. Programming* 6, 1974, 48~61.

Payan C., Covering by minimal transversals, *Discrete Math*. 23, 1978, 273~277.

Pelikan J., Properties of balanced incomplete block designs, *Combinatorial Theory and Its Applications*, (Erdös, Renyi, Sós, eds.), North-Holland, Amsterdam 1971, 869~890.

Poels J. M., Conditions d'intersections dans les systèmes de Steiner, *Mem. Lic. Sc. Math*. Université de Bruxelles 1972.

Pulleybland W. R., Dual integrality in *b*-matching problems, *Math. Prog. Study* 12, 1980, 176~196.

Pulleybland W. R., Total dual integrality and *b*-matchings, *Operations Research Letters* 1, 1981, 28~30.

Pulleyblank W. R., Polyhedral combinatorics, (A. Bachem, M. Grötschel, B. Korte, eds.), *Mathematical Programming-The State of the Art*, Springer Verlag, Heidelberg 1983, 312~345.

Pulleyblank W. R., and J. Edmonds, Faces of 1-matching polyhedra, *Hypergraph Seminar*, (C. Berge, D. K. Ray-Chaudhuri, eds.), Springer Verlag 1974, 214~242.

Reiman I., Über ein Problem von Zarankiewicz, *Acta Math. Acad. Sci. Hung*. 9, 1958, 269~278.

Richardson M., On finite projective games, *Proc. Amer. Math. Soc*. 7, 1965, 458~465.

Rosenfeld M., On a problem of C. E. Shannon in Graph Theory, *Proc. Amer. Math. Soc*. 18, 1967, 315~319.

Ryser H., *Oral communication*, 1965.

Schrijver A., Short proofs on the matching polyhedron, *J. Comb. Theory B*, 34, 1983, 104~108.

Schrijver A., Min-max results in combinatorial optimization, (A. Bachem, M. Grötschel, B. Korte, eds.), *Mathematical Programming-The State of the Art*, Springer Verlag, Heidelberg 1983, 439~500.

Schrijver A., Total dual integrality from directed graphs, crossing families, and sub-and supermodular functions, (W. R. Pulleyblank, ed.), *Progress in Combinatorial Optimization*, Academic Press, 1984.

Schrijver A., and P. D. Seymour, A proof of total dual integrality of matching polyhedra, Report ZN79/77. Mathematisch Centrum, Amsterdam 1977.

Scott S. H., Multiple node colourings of finits graphs, Doctoral Dissertation, Univ. of Reading, England 1975.

Seymour P. D., On the two-colouring of hypergraphs, *Quart. J. Math. Oxford* 25, 1974, 303~312.

Stahl S., $n$-tuple colorings and associated graphs, *J. Comb. Theory B*, 20, 1976, 185~207.

Stein S. K., Two combinatorial covering theorems, *J. Comb. Theory A*, 16, 1974, 391~397.

Sterboul, F., On the chromatic number of the direct product of hypergraphs, *Hypergraph Seminar*, (Berge, Ray-Chaudhuri, eds.), Springer Verlag, Lecture Notes in Math. 411, 1972, 165~174.

Sterboul F., Sur le nombre transversal des hypergraphes uniformes, *Discrete Math*. 22, 1978, 91~96.

Sterboul F., A characterization of the graphs in which the transversal number equals the matching number, *J. Comb. Theory B*, 27, 1979, 228~229.

Sterboul F., Finite polarized partition relations, *J. Comb. Theory B*, 34, 1983, 99~103.

Tutte W. T., The factors of graphs, *Canad. J. Math*. 4, 1952, 314~328.

Uhry J.-P., Sur le problème de couplage maximal, *R. A. I. R. O*. 9, 1975, 3, 19~20.

Zarankiewicz S., Problem 101, *Colloq. Math*. 2, 1951, 301.

Znam S., On a combinatorial problem of K. Zarankiewicz, *Coll. Math*., 1963, 81~84.

# 第4章　着　色

## 1　色数

设$H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$是一个超图，整数$k\geqslant 2$。$H$的一个顶点**$k$-着色**是指对$X$的一个$k$-分划$(S_1,S_2,\cdots,S_k)$，使得$H$的每条非环的边至少与两个类相交，即

$$E\in H,|E|>1\Rightarrow E\not\subset S_i\qquad(i=1,2,\cdots,k)$$

$S_i$中的顶点称为是$i$色顶点。$S_i$允许是空集，故只有环是单色边。使超图$H$有$k$-着色的最小正整数$k$称为$H$的**色数**，记为$\chi(H)$。

**例**　设$H$是一个超图，其顶点是某化工厂的各种不同的废物，其边为如下顶点的子集：当这些废物放在一起时有危险。则$H$的色数就是该厂放置这些废物而不会引起任何危险所需的最少场所数。

若超图$H$是图，则$H$的色数就是通常图中的色数。

设$H$为$X$上一个超图，$S\subset X$，若$S$不包含任何基数大于1的边，则称$S$是$H$的一个**独立集**。$H$的最大独立集的基数称为$H$的**独立数**，记为$\alpha(H)$。

**例**　设$P_7$是7个顶点的射影平面的超图（见第2章图1）。可以直接验证$\alpha(P_7)=4$和$\chi(P_7)=3$。

**性质1**　每个$n$阶超图$H$满足$\chi(H)\alpha(H)\geqslant n$。

**证**　考虑$H$的$k$-着色$(S_1,S_2,\cdots,S_k)$，这里$k=\chi(H)$，则

$$n=\sum_{i=1}^{k}|S_i|\leqslant k\cdot\alpha(H)=\chi(H)\alpha(H)$$

**性质2**　每个$n$阶超图$H$满足$\chi(H)+\alpha(H)\leqslant n+1$。

**证**　设$S$是$H$的最大独立集。将$S$中的顶点着第一色，并用另外$n-\alpha(H)$种不同的颜色给$X-S$中的顶点着色，则有

$$\chi(H)\leqslant(n-\alpha(H))+1$$

顶点$x$的**$\beta$-星**是满足下列条件的一个簇$H^\beta(x)\subset H(x)$：

（ⅰ）$E\in H^\beta(x)\Rightarrow|E|\geqslant 2$

（ⅱ）$E,E'\in H^\beta(x)\Rightarrow E\cap E'=\{x\}$

对于$H$中的顶点$x$，记$d_H^\beta(x)=\max\limits_{H^\beta(x)}|H^\beta(x)|$，称为$x$的**$\beta$-度**，$\Delta^\beta(H)=\max\limits_{x\in X}d_H^\beta(x)$称为$H$的最大$\beta$-度；同样$\delta^\beta(H)$称为$H$的最小$\beta$-度。$H|A$表示$H$含在$A$中的边簇，则可得关于色数上界的一个结论：

**定理1**　$X$ 上的超图 $H$ 满足

$$\chi(H) \leqslant \max_{A\subset X} \delta^{\beta}(H|A) + 1$$

**证**　令 $p = \max_{A\subset X}\delta^{\beta}(H|A)$。用 $p+1$ 色逐次对其顶点着色：先按下列规则对顶点排序 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_2, x_1$：

（i）$x_n$ 是 $H$ 中具有最小 $\beta$- 度的顶点；

（ii）对于 $i < n$，$x_i$ 是 $H|[X - \{x_n, \cdots, x_{i+2}, x_{i+1}\}]$ 中其 $\beta$- 度小于或等于 $p$ 的一个顶点。

若已对顶点 $x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}$ 进行了 $(p+1)$- 着色且无单色边出现。$H(x_i)$ 中不可能存在满足下面性质的 $p+1$ 条边，这些边除 $x_i$ 外构成单色边且分别着以 $1, 2, \cdots, p+1$ 色；否则 $d^{\beta}_{H'}(x_i) \geqslant p+1$，这里 $H' = H|[X - \{x_n, \cdots, x_{i+2}, x_{i+1}\}]$，这与 $x_i$ 的选取相矛盾。故存在颜色 $j \leqslant p+1$，将 $x_i$ 着 $j$ 色后仍没有单色边出现。继续这一过程，我们可得到 $H$ 的一个 $(p+1)$- 着色。

**推论1**（Lovász[1968]）　对每个最大 $\beta$- 度为 $\Delta^{\beta}$ 的超图 $H$，有 $\chi(H) \leqslant \Delta^{\beta}(H) + 1$，此外，对秩为 $r$ 的超图，由于 $\chi(K^r_n) = \Delta^{\beta}(K^r_n) + 1$，故这个上界是最好的。

事实上，令 $q = \Delta^{\beta}(H) + 1$，则 $H$ 中不存在满足 $d^{\beta}_H(x) \geqslant q$ 的顶点，则由定理1，可得 $\chi(H) \leqslant q$。此外，还因

$$\chi(K^r_n) = \left\lceil \frac{n}{r-1} \right\rceil \geqslant \frac{n}{r-1} \geqslant \frac{(r-1)\Delta^{\beta}(K^r_n) + 1}{r-1} = \Delta^{\beta}(K^r_n) + \frac{1}{r-1}$$

所以 $\chi(K^r_n) = \Delta^{\beta}(K^r_n) + 1$。

**推论2**　$H$ 是 $n$ 阶超图，则

$$\alpha(H) \geqslant \frac{n}{\Delta^{\beta}(H) + 1}$$

由性质1知

$$\alpha(H) \geqslant \frac{n}{\chi(H)} \geqslant \frac{n}{\Delta^{\beta}(H) + 1}$$

**推论3**　$H$ 是 $n$ 阶无环超图，则

$$\tau(H) \leqslant \frac{n\Delta^{\beta}(H)}{\Delta^{\beta}(H) + 1}$$

因为独立集的补是一个横贯，故有

$$\tau(H) = n - \alpha(H) \leqslant \frac{n\Delta^{\beta}(H)}{\Delta^{\beta}(H) + 1}$$

用这些推论可较容易地解决大量的组合问题。

**应用1**　$G$ 是 $X$ 上一个最大度为 $h$ 的简单图，给 $G$ 的顶点着色，使得 $G$ 中不含单色圈。问所需的最少颜色数目是多少（Motzkin[1968]）？

考虑 $X$ 上的超图 $H$，其边由 $G$ 中圈上顶点构成，则上述问题的答案是 $\chi(H)$，

由推论 1 可得

$$\chi(H) \leqslant \Delta^{\beta}(H) + 1 \leqslant \left[\frac{h}{2}\right] + 1$$

**应用 2** $G$ 是 $X$ 上一个最大度为 $h$ 的简单图，给 $G$ 的顶点着色，对任意 $i$ 使得着 $i$ 色的顶点集的诱导子图 $G_i$ 的最大度小于 $t$。问所需的最少颜色数目 $\gamma_t(G)$ 是多少(Gerencsér[1965])?

$\gamma_t(G)$ 是通常色数($t = 1$ 的情形)的推广。构造 $X$ 上的超图 $H$，$G$ 中最大度为 $t$ 的诱导子图为 $H$ 的边，则由推论 1 可得

$$\gamma_t(G) = \chi(H) \leqslant \Delta^{\beta}(H) + 1 \leqslant \left[\frac{h}{t}\right] + 1$$

**应用 3** $G$ 是 $X$ 上一个简单图，给 $G$ 的顶点着色，使得不含长为 $k$ 的单色路。问所需的最少颜色数目 $\bar{\gamma}_k(G)$ 是多少(Chartrand, Geller, Hedetniemi[1968])?

$\bar{\gamma}_k(G)$ 是通常色数($k = 1$ 的情形)的推广。与上述方法类似，可定义一个超图 $H$，并可得到它的一个上界。

**应用 4** $G$ 是 $X$ 上简单图，给 $G$ 的顶点着色，使得没有一个 $k$- 团是单色的，问所需的最少颜色数目 $\bar{\bar{\gamma}}_k(G)$ 是多少(Sachs, Schaüble[1968])?

$\bar{\bar{\gamma}}_k(G)$ 是通常色数($k = 2$ 的情形)的推广。与上述方法类似，可定义一个超图 $H$，并可得到它的一个上界。

**应用 5(对称 Ramsey 数)** 考虑一个完全图 $K_n$，用 $q$ 种颜色对 $K_n$ 的边着色，使得 $K_n$ 中不存在单色 $p$- 团。不使上述情况出现的最小整数 $n$ 称为对称 Ramsey 数，记为 $R(\underbrace{p,p,\cdots,p}_{q\text{个}})$ 或 $R_p^q$。也就是说，只要 $n < R_p^q$，则存在一种 $K_n$ 的 $q$ 边着色，使得不存在单色 $p$- 团。

把定理 1 应用于上述问题。在 $K_n$ 的边集上定义一个超图 $K_n|K_p$，并把 $K_n$ 中任一个 $K_p$ 的边子集作为 $K_n|K_p$ 的边。于是 $n \leqslant R_p^q - 1$ 等价于超图 $K_n|K_p$ 是 $q$- 可着色的。

作为例子，考虑 $p = 3$ 的情况，则 $n < R_3^q$ 等价于能把 $K_n$ 的边分解为 $q$ 个没有三角形的子图。已知 $K_5$ 的边可以分解成两个没有三角形的子图，即两个五边形；Greenwood 和 Gleason[1955]，还有 Kalbfleisch 和 Stanton[1968] 分别给出了 $K_{16}$ 的边能分解成三个没有三角形的子图。最后 Sánchez-Folores 证明了 $51 \leqslant R_3^4 \leqslant 64$(见 *Dis. Math* 140(1995), 281 ~ 286)[①]。故

(1) $R_3^2 \geqslant 6$, $R_3^3 \geqslant 17$, $51 \leqslant R_3^4 \leqslant 64$

另外还有

① 原文误为 $R_3^4 \geqslant 65$。

(2) $R_3^q \leqslant 1 + q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$

事实上，设 $K$ 是阶为 $R_3^q - 1$ 的完全图，其边可分解为 $q$ 个没有三角形的子图 $G_1, G_2, \cdots, G_q$。令 $a$ 是 $K$ 的一个顶点，$A_i$ 是 $G_i$ 中与 $a$ 相邻的顶点集。因为 $G_i$ 中不含三角形，故子图 $K[A_i]$ 中不含 $G_i$ 的任何边，因此 $K[A_i]$ 可分解为 $q-1$ 个不含三角形的子图，因此

$$|A_i| \leqslant R_3^{q-1} - 1$$

由此推得

$$R_3^q - 1 = 1 + d_K(a) = 1 + \sum_{i=1}^{q} |A_i| \leqslant 1 + (R_3^{q-1} - 1)q$$

由这个递推式立即可推得(2)式成立。

由(1)与(2)，有

$$R_3^2 = 6, \qquad R_3^3 = 17$$

**定理 2**(Lepp Gardner [1997])　设 $H$ 是一个线性无环超图，则除以下三种情形外，均有 $\chi(H) \leqslant \Delta(H)$：

(1) $\Delta(H) = 1$①

(2) $\Delta(H) = 2$ 且 $H$ 的一个连通分支是一个含奇圈的图

(3) $\Delta(H) > 2$ 且 $H$ 的一个连通分支是 $\Delta(H)+1$ 阶的完全图

对这三种情形的超图 $H$，$\chi(H) = \Delta(H) + 1$ 成立。

当 $H$ 是线性时，$\Delta^{\beta}(H) = \Delta(H)$，由定理 1，$\chi(H) \leqslant \Delta(H) + 1$ 成立。Lepp Gardner [1997] 的定理证明了当 $H$ 是线性的且不满足上述三条时，这个不等式是严格的。

上述结果是 Brooks 定理的推广(见 Graphs，第 15 章，定理 6)。

## 2　形形式式的着色

除前一节所定义的着色(通常称为"弱着色")概念外，还存在其他着色概念，将图的着色推广到超图中。

**强着色**。集合 $X$ 上超图 $H$ 的一个(顶点)强 $k$- 着色是对 $X$ 的一个 $k$- 分划 $(S_1, S_2, \cdots, S_k)$，使得同一条边中的任两个顶点均着异色，即对任一条边 $E$ 有

$$|E \cap S_i| \leqslant 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

令

$$\gamma(H) = \min\{k \mid H \text{ 有一个强 } k\text{- 着色}\}$$

① 原文没有这一条，但显然，这类图 $H$ 有 $\chi(H) = 2 = \Delta(H) + 1$。

称 $\gamma(H)$ 为 $H$ 的强色数。注意到每个强着色必定是一个着色，因此有 $\gamma(H) \geqslant \chi(H)$。但是，$\gamma(H)$ 不超过 $H$ 的 2- 截口 $[H]_2$ 的色数，故对强色数不再作研究。

**均匀着色**。$X$ 上超图 $H$ 的一个（顶点）**均匀 $k$- 着色**是一个 $X$ 的 $k$- 分划 $(S_1, S_2, \cdots, S_k)$，满足对 $H$ 中每条边 $E$，所有颜色出现的次数至多相差 1。也就是说，

$$\left[\frac{|E|}{k}\right] \leqslant |E \cap S_i| \leqslant \left\{\frac{|E|}{k}\right\} \qquad (i = 1,2,\cdots,k)$$

注意：一个均匀 $k$- 着色必定是 $k$- 着色，且每个强 $k$- 着色也是均匀 $k$- 着色。超图的均匀着色将在单模超图中作进一步的研究（第 5 章，§2）。

**好着色**。$X$ 上超图 $H$ 的一个**好 $k$- 着色**是对 $X$ 的一个 $k$- 分划 $(S_1, S_2, \cdots, S_k)$，使得每条边 $E$ 包含最大可能的不同颜色数，即 $\min\{|E|, k\}$。

注意：一个好着色必定是一个着色。且对 $k = 2$，一个好 2- 着色就是 2- 着色；对 $k \leqslant \min|E|$，好 $k$ - 着色的每个色类是 $H$ 的一个横贯集；对 $k \geqslant \max|E|$，好 $k$- 着色就是强着色。最后，对每个 $k$，均匀 $k$- 着色也是好 $k$- 着色。

好着色将在平衡超图中作进一步研究（第 5 章，§3）。

**$I$- 正则着色**。$H$ 是 $X$ 上的一个超图，对每条边 $E_j$ 给定两个整数 $a_j$ 和 $b_j$ $(0 \leqslant a_j \leqslant b_j)$，令

$$I = \{[a_j, b_j] \mid j = 1,2,\cdots,m\}$$

$H$ 的一个 **$I$- 正则 $k$- 着色**是对 $X$ 的一个 $k$-$(S_1, S_2, \cdots, S_k)$，使得对每条边 $E_j$ 满足

$$a_j \leqslant |E_j \cap S_i| \leqslant b_j \qquad (i = 1,2,\cdots,k)$$

注意：一个 $I$- 正则着色也是一个着色。且还有：

(1) 每个着色是一个 $a_j = 0, b_j = \max\{1, |E_j| - 1\}$ 的 $I$- 正则着色；

(2) 每个强着色是一个 $a_j = 0, b_j = 1$ 的 $I$- 正则着色；

(3) 每个均匀着色是一个 $a_j = \left[\frac{|E_j|}{k}\right], b_j = \left\{\frac{|E_j|}{k}\right\}$ 的 $I$- 正则着色。

$I$- 正则着色由 Werra [1979] 引进，并对序列 $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \cdots \geqslant s_k$ 研究了 $I$- 正则 $k$- 着色 $(S_1, S_2, \cdots, S_k)$ 其中 $s_1 = |S_1|, s_2 = |S_2|, \cdots, s_k = |S_k|$ 的存在性。Hilton 和 Jones [1978] 获得了关于简单图的 $I$- 正则 $k$- 边着色的一些有意义的结果。

作为一个练习，可以证明：若 $r(H) = 2$，所有这些定义均是通常的图的着色。也可以证明：若 $H$ 是一条直线上点集为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的区间超图，则从左到右对顶点依次着 $1,2,\cdots,k,1,2,\cdots,k,1,2,\cdots$，可得 $H$ 的一个均匀 $k$- 着色。因此区间超图的（弱）色数等于 2，强色数等于 $\gamma(H)$。

## 3 一致着色

$H$ 是一个 $n$ 阶超图，$H$ 的一个 $k$- 着色 $(S_1, S_2, \cdots, S_k)$ 称为是一致的，若每个色

类的顶点数至多相差1,即

$$\left[\frac{n}{k}\right] \leqslant |S_i| \leqslant \left\{\frac{n}{k}\right\} \qquad (i = 1,2,\cdots,k)$$

一致 $k$- 着色的存在性问题来源于大量的时间表问题。

**例1** 组织学术会议。在一次学术会议中共组织 $n$ 次报告 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,每次报告进行半天,共有 $q$ 个半天。第 $i$ 位代表必须出席的会议集合记为 $E_i \subset \{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$。于是在 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上定义了一个超图 $H = (E_1,E_2,\cdots,E_m)$。能否仅用 $p$ 个报告厅在这 $q$ 个半天时间中将 $n$ 次报告安排完毕?显然 $pq \geqslant n$,即 $p \geqslant \left\{\frac{n}{q}\right\}$。

若超图 $H$ 含有一个一致强 $q$- 着色 $(S_1,S_2,\cdots,S_q)$,这个条件是一个充要条件。事实上,若用 $S_i$ 表示第 $i$ 个半天能召开的会议的集合,则 $S_i$ 应满足以下约束条件:

(1) $|S_i \cap E_j| \leqslant 1 \qquad (j = 1,2,\cdots,m)$

(2) $|S_i| \leqslant \left\{\frac{n}{q}\right\} \leqslant p$

符合会议的要求。

关于超图的一致强 $k$- 着色的存在性,利用如下的Hajnal和Szemerédi的著名的定理(见Graphs,第13章,§2)可证明。即对每个 $k \geqslant h+1$,这里的 $h$ 为 $[H]_2$ 的最大度,$[H]_2$ 含有一个一致 $k$- 着色。因此对每个 $k \geqslant h+1$,$H$ 含有一个一致强 $k$- 着色。

**例2** 组织航空展览。在一个航空展览期间,每10分钟起飞一架飞机,两架飞机不应同时起飞表演。现有 $m$ 位购买者想在不同的时间段观看这次航展。事先已知第 $j$ 个购买者将观看飞机表演的时间段为 $E_j$,则在飞行时间集上定义了超图 $H = (E_1,E_2,\cdots,E_m)$。此外,$k$ 个参展商希望能给所有的购买者在天空中展示他们的航空器,且展示的时间总和相同。显然需有 $k \leqslant \min\limits_j |E_j|$。若 $H$ 含有一个一致好 $k$- 着色 $(S_1,S_2,\cdots,S_k)$,这条件也是充分的。事实上,若把分配给第 $i$ 个参展商的时间集合记为 $S_i$,则 $S_i$ 应满足以下约束条件:

$$S_i \cap E_j \neq \varnothing \qquad (i,j)$$

$$-1 \leqslant |S_i| - |S_j| \leqslant 1 \qquad (i,j)$$

注意到超图 $H$ 是一个区间超图,若对 $k$,依次对时间轴上的顶点着 $1,2,\cdots,k,1,2,\cdots,k,1,2,\cdots$,它恒含有一个一致好 $k$- 着色。

**例3** 组织乒乓球比赛。有 $n$ 位选手 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 参加比赛,选手之间安排 $m$ 场比赛定义为 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上图 $G$ 的 $m$ 条边。假设每场比赛时间不得超过1小时,整个比赛时间限制在 $p$ 小时,可用的乒乓球桌为 $q$ 张。为了能满足这些要求,图

$G$ 的最大度必须不超过 $p$，且 $pq \geqslant m$，即

(1) $p \geqslant \Delta(G)$

(2) $q \geqslant \left\lceil \frac{m}{p} \right\rceil$

若 $G$ 有一致 $p$- 边着色，则条件(1) 和(2) 是充要的。

显然，如果$(E_1, E_2, \cdots, E_p)$ 是 $G$ 的一致 $p$- 边着色，从而有 $|E_i| \leqslant \left\lceil \frac{m}{p} \right\rceil \leqslant q$，故 $E_i$ 可安排第 $i$ 个小时段内的比赛。

McDiarmid [1972] 证明：当 $k \geqslant \Delta(G) + 1$ 时，图 $G$ 有一致 $k$- 边着色。

**定理 3** 令超图 $H$ 有一个好 $k$- 着色。若对每个好 $k$- 着色$(S_i | i \in I)$ 和满足 $|S_j| \geqslant |S_i| + 2$ 的任意$(S_i, S_j)$，子超图 $H[S_i \cup S_j]$ 含有 2- 色分划$(S_i', S_j')$ 满足

(1) $|S_i| + 1 \leqslant |S_i'| \leqslant |S_j'| \leqslant |S_j| - 1$

则 $H$ 有一个一致好 $k$- 着色。

**证** 令 $d = \max\limits_{i,j \in I}(|S_i| - |S_j|)$ 为超图 $H$ 的好 $k$- 着色$(S_1, S_2, \cdots, S_k)$ 的"亏数"。下面逐步改变这个 $k$- 着色，直到变成一致为止。若 $d \leqslant 1$，这着色已经是一致的。如果 $d \geqslant 2$，考虑两个色类，不失一般性设为 $S_1$ 和 $S_2$，其满足

$$|S_1| = \min |S_i|$$

$$|S_2| = \max |S_i|$$

因为 $|S_2| \geqslant |S_1| + 2$，则 $H[S_1 \cup S_2]$ 存在一个 2- 色分划$(S_1', S_2')$ 满足不等式(1)。易证$(S_1', S_2', S_3, \cdots, S_k)$ 仍是 $H$ 的好 $k$- 着色。此外，由(1) 式，有

$$|S_2'| - |S_1'| \leqslant (|S_2| - 1) - (|S_1| + 1) = d - 2$$

$$|S_1'| - |S_2'| \leqslant 0 \leqslant d - 2$$

$$|S_2'| - |S_i| \leqslant |S_2| - |S_i| - 1 \leqslant d - 1 \qquad (i \neq 1,2)$$

$$|S_1'| - |S_i| \leqslant |S_2| - |S_i| - 1 \leqslant d - 1 \qquad (i \neq 1,2)$$

$$|S_i| - |S_2'| \leqslant |S_i| - |S_1| - 1 \leqslant d - 1 \qquad (i \neq 1,2)$$

$$|S_i| - |S_1'| \leqslant |S_i| - |S_1| - 1 \leqslant d - 1 \qquad (i \neq 1,2)$$

因此，通过这步骤，在分划中减少了 $|S_p| - |S_q| = d$ 的$(S_p, S_q)$ 的对数。重复这一过程，直至亏数 $d \leqslant 1$，从而得到一个好 $k$- 着色是一致的。

**推论 1**(McDiarmid [1972]) $G$ 是边色数为 $q(G)$ 的多重图。对 $k \geqslant q(G)$，$G$ 有一个一致 $k$- 边着色。

事实上，对 $k \geqslant q(G) \geqslant \Delta(G)$，每个 $k$- 边着色是好 $k$- 边着色。此外，着 $i$ 色或 $j$ 色的这些边的诱导子图的连通分支是偶圈或路，若 $|S_i| - |S_j| \geqslant 2$，则存在一条路，它的第一条边和最后一条边都着 $i$ 色，通过交换这条路中边上的两种颜色，可得到满足(1) 的着色。于是由定理 3，推论 1 成立。

**推论 2**(de Werra [1981]) $G$ 是一个有好$k$-边着色的多重图,则 $G$ 有一致好$k$-边着色。

若不然,设$(E_1,E_2,\cdots,E_k)$是 $G$ 的一个好$k$-边着色,且假设 $E_1,E_2$ 满足$|E_2|\geqslant|E_1|+2$,$G^{1,2}$ 表示着1色和2色的这些边的诱导子图,则 $G^{1,2}$ 有一个好2-边着色。因此 $G^{1,2}$ 中没有奇圈分支。下面我们将找到 $G^{1,2}$ 的一个一致的2-边着色。假设 $G^{1,2}$ 是连通的。

若 $G^{1,2}$ 所有顶点的度为偶数,则 $G^{1,2}$ 有欧拉环游,沿着这个环游用两种颜色交替地给边着色。若这欧拉环游是奇长的,因为 $G^{1,2}$ 不是奇圈,故可取 $G^{1,2}$ 中度数大于2的顶点为始点。所以 $G^{1,2}$ 有一个一致2-边着色。

若存在度为奇数的顶点,设 $G^{1,2}$ 有$2p$个度为奇数的顶点,则 $G^{1,2}$ 的边可分划为 $p$ 个子集,而每个子集存在一条连接两个奇点的路。对上述某条路上的两种颜色进行交换,可得一个新的2-边着色且满足(1),由于定理3,推论2成立。

注意到推论2比推论1更为一般,保证 $G$ 有好$k$-着色的$k$被 Fournier [1973]得到(也可参见 de Werra [1977])。

给一个超图 $H$,两位选手 $A$ 和$B$"在 $H$ 上的占位博弈"是依次轮流对 $H$ 的顶点着色,$A$ 对顶点着红色,$B$ 对顶点着蓝色。对已经着色的顶点不能重复着色。谁先得到一个单色边谁就获胜;如果两位选手无一得到单色边,则平局。

**例1** 在 $p$ 维超方体上进行走方格博弈。这个博弈是在边长为 $r$ 的$p$维超方体的胞腔集上进行占位博弈。考虑超方体上 $r^p$ 个顶点(胞腔)的超图,其边为在一条线上的 $r$ 个顶点。Hales 和 Jewett [1963] 研究过这个博弈,并证明了若$r(\geqslant 3^p-1)$是奇数或$r(\geqslant 2^{p+1}-2)$是偶数,则选手 $B$ 能逼成平局。

也可在任何组合构形上尝试在一条线上的三个顶点着同色的博弈。例如7个顶点的射影平面。

**例2** Ramsey 博弈。两位选手 $A$ 和$B$ 分别用红、蓝两种颜色交替地对完全图$K_n$的边着色。第一位着出一个同颜色的$k$-团的选手获胜,其对手失败。用 $H_n$ 表示有$\binom{n}{2}$个顶点的$\binom{k}{2}$-一致超图。由 Ramsey 数理论知,存在一个整数 $R(k,k)$,使得对一切整数 $n\geqslant R(k,k)$,超图 $H_n$ 没有2-边着色,从而第一位选手有一个获胜的策略。令 $n(k)$ 为使第一位选手有获胜策略的最小正整数,则 $n(k)\leqslant R(k,k)$。

**基本性质** 在超图$H$上的占位博弈中,若$H$不含一致2-着色,则第一位选手 $A$ 有一个获胜的策略。

**证** 设 $H$ 不含一致2-着色,故当所有的顶点被着色时,必定存在单色边,从而不可能出现平局。Zermelo-von Neumann定理蕴含了选手 $A$(或选手 $B$)有一个获胜的策略。

下面用反证法。若选手 $B$ 有一个获胜的策略$\sigma$,产生如下的序列:

$$x_1,\ y_1=\sigma(x_1),\ x_2,\ y_2=\sigma(x_1,x_2),\ x_3,\ y_3=\sigma(x_1,x_2,x_3)$$

等等。第一条单色边是 $B$ 的颜色 —— 蓝色。但选手 $A$ 可按以下规则选取：$x_0$ 是任意一个顶点。选手 $A$ 首先选取 $x_1 = \sigma(x_0)$，第二次选取 $x_2 = \sigma(x_0, y_1)$ 等等。若在某一步中出现 $y_i = x_0$，即选手 $B$ 选取 $x_0$，选手 $A$ 可用同样的方法选取 $x_{i+1} = \sigma(x_0, y_1, \cdots, y_i')$，这里 $y_i'$ 是未被着色的任意一个新顶点。这样第一条单色边一定为红色，故选手 $A$ 有一个获胜的策略，矛盾。

**定理 4** 设超图 $H$ 满足下面条件：

(1) $\sum_{E\in H} 2^{-|E|} + \max_x \sum_{E\in H(x)} 2^{-|E|} < 1$

则 $H$ 存在一致 2- 着色。从而若在 $H$ 上做占位博弈，则 $B$ 有一个平局的策略。

**证** 考虑满足(1)的超图 $H$。假设选手 $A$ 总企图获胜。他选取顶点 $x_1$ 之后，选手 $B$ 必定在 $H_1 = H_{X-\{x_1\}}$ 中选取顶点 $y_1$，接下去选手 $A$ 必定在部分子超图 $H_1' = H_1 - H_1(y_1)$ 中选取 $x_2$ 等等，故产生一个超图序列 $H, H_1, H_1', H_2, H_2', \cdots$。下面将证明 $B$ 决不会使得超图 $H'_{i-1}$ 含有环，即 $A$ 决不会使得 $H_i$ 以空集为“边”。为了简单起见，令

$$\nu(H) = \sum_{E\in H} 2^{-|E|}$$

则超图 $H_1 = H_{X-\{x_1\}}$ 满足

$$\nu(H_1) = \sum_{E\in H(x_1)} 2^{-(|E|-1)} + \sum_{E\in H-H(x_1)} 2^{-|E|}$$

由此，由(1)可得下面的(2)：

(2) $\nu(H_1) = \nu(H) + \nu[H(x_1)] < 1$

令 $y_1$ 是选手 $B$ 所选取的点，则新的超图 $H_1' = H_1 - H_1(y_1)$ 满足：

(3) $\nu(H_1') = \nu(H_1) - \nu[H_1(y_1)]$

若 $B$ 选取顶点 $y_1$ 使得 $\nu[H_1(y_1)]$ 最大，则无论对手怎样选取 $x_2$，总有

(4) $\nu[H_1(x_2)] \leqslant \nu[H_1(y_1)]$

$A$ 选取 $x_2$ 后，由(2)，(3) 和(4)，新的超图 $H_2 = [H_1']_{X-\{x_2\}}$ 满足

$$\begin{aligned}\nu(H_2) &= \nu(H_1') + \nu[H_1'(x_2)] \leqslant \nu(H_1') + \nu[H_1(x_2)] \\ &= \nu(H_1) - \nu[H_1(y_1)] + \nu[H_1(x_2)] \leqslant \nu(H_1) < 1\end{aligned}$$

若 $B$ 照此进行，于是总有 $\nu(H_i) \leqslant \nu(H_1) < 1$。由于若 $H_i$ 中含空集为边，则有 $\nu(H_i) \geqslant \frac{1}{2^0} = 1$，所以在 $H_i$ 中不可能有空集为边。

故 $B$ 有一个平局的策略。从而由上述基本性质，$H$ 含有一致 2- 边着色。

**推论**(Erdös, Selfridge [1973]　设 $H = (E_i \mid i \in I)$ 是无环超图，且满足 $m + \Delta < 2^s$，这里 $s = \min_i |E_i|$，$m$ 为边数，$\Delta$ 为最大度，则 $H$ 含有一致 2- 着色。此外，在 $H$ 上的占位博弈中，第二个选手 $B$ 有一个平局的策略。

事实上，在这种情况下，我们有

$$\sum_{E\in H}2^{-|E|}+\max_{x}\sum_{E\in H(x)}2^{-|E|}\leqslant m2^{-s}+\Delta 2^{-s}<1$$

**定理5** 设 $H$ 是 $n$ 阶无环超图，且满足

$$\sum_{E\in H}\binom{n-|E|}{[n/2]}<\binom{n-1}{[n/2]}$$

则 $H$ 含有一致2-着色。

**证** 令 $p=\left[\frac{n}{2}\right]$，$\tau_p$ 是 $H$ 中顶点数为 $p$ 的横贯簇。考虑超图

$$K_n^p-\tau_p=\{F|F\subset X,|F|=p,\text{且存在 }E\in H,\text{使得 }F\cap E=\varnothing\}$$

则有

$$m(K_n^p)-m(\tau_p)=m(K_n^p-\tau_p)\leqslant\sum_{E\in H}\binom{n-|E|}{p}<\binom{n-1}{p}$$

因此

$$m(\tau_p)>\binom{n}{p}-\binom{n-1}{p}=\binom{n-1}{p-1}$$

EKR定理蕴含了 $\tau_p$ 不是交簇，故存在两条不相交的边 $A$ 和 $B$。若 $n$ 是偶数，则 $(A,B)$ 是 $H$ 的一致2-着色。若 $n$ 是奇数，将 $X-(A\cup B)$ 中唯一的点加到 $A$ 中，最后也得到一致2-着色。

**推广**(Hansen, Loréa [1978]) $H$ 是一个 $n(\geqslant k)$ 阶超图。令 $p=\left[\frac{n}{k}\right]$，$q=n-pk$，若

$$k\sum_{E\in H}\binom{n-|E|}{n-p}+q\sum_{E\in H}\frac{|E|}{p+1-|E|}<\binom{n}{p}$$

则 $H$ 含有一个一致 $k$-着色。

# 4 有关色数的极值问题

许多主要由匈牙利数学家作出的成果，其目标是研究具有给定某种性质的 $n$ 阶 $r$-一致超图的最少边数(或最多边数)，这些通常被称为"极值问题"。文献中大多数的结果是用"概率的方法"获得(见 Erdös, Spencer [1974])。

首先考虑阶数不超过 $n$，$k$-可着色的 $r$-一致超图的最大边数，记为

$$M_k(n,r)=\max_{\substack{\chi(H)\leqslant k\\ n(H)\leqslant n}}m(H)$$

接着考虑阶数不超过 $n$，不是 $k$-可着色的 $r$-一致超图的最少边数，记为

$$m_k(n,r)=\min_{\substack{\chi(H)\geqslant k\\ n(H)\leqslant n}}m(H)$$

用 $M_k^0(n,r)$ 表示具有以下性质的最大值 $m$：存在一个 $r$-一致超图 $H$ 使得

$n(H)\leqslant n, m(H)=m$，在 $H$ 中加上 $n-n(H)$ 个孤立点后有一个一致 $k$- 着色；用 $m_k^0(n,r)$ 表示具有以下性质的 $r$- 一致超图 $H$ 的最少边数：$n(H)\leqslant n$，且即使在 $H$ 中增加 $n-n(H)$ 个孤立点后仍不存在一致 $k$- 着色。于是有以下不等式：

$$1\leqslant m_k(n,r)\leqslant M_k(n,r)\leqslant\binom{n}{r}$$

$$1\leqslant m_k^0(n,r)\leqslant M_k^0(n,r)\leqslant\binom{n}{r}$$

$$m_k^0(n,r)\leqslant m_k(n,r)$$

$$M_k^0(n,r)\leqslant M_k(n,r)$$

由下面定理，容易计算 $M_k(n,r)$ 和 $M_k^0(n,r)$。

**定理 6**(Sterboul [1974]) 设 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_k)$ 是 $n$ 元集 $X$ 的一个一致 $k$- 分划，$H_{n,k}^r$ 是 $X$ 上的一个 $r$- 一致超图：

$$H_{n,k}^r=(E\mid E\subset X;|E|=r,E\not\subset Y_1,E\not\subset Y_2,\cdots,E\not\subset Y_k)$$

则

$$M_k(n,r)=M_k^0(n,r)=m(H_{n,k}^r)$$

且每一个 $n$ 阶其边数为 $M_k(n,r)$ 的 $r$- 一致 $k$- 可着色的超图同构于 $H_{n,k}^r$。

**证** 易见每个一致 $k$- 着色的 $n$ 阶 $r$- 一致超图在同构意义下是 $H_{n,k}^r$ 的部分超图。此外，若 $H$ 是 $n$ 阶 $r$- 一致超图且 $\chi(H)\leqslant k$，考虑 $H$ 的 $k$- 着色 $(S_1,S_2,\cdots,S_k)$，令 $|S_i|=n_i$，有

$$m(H)\leqslant\binom{n}{r}-\sum_{i=1}^{k}\binom{n_i}{r}\leqslant\binom{n}{r}-\min_{\sum n_i=n}\sum_{i=1}^{k}\binom{n_i}{r}$$

易知，当 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$ 时，$\sum_{i=1}^{k}\binom{n_i}{r}$ 达到最小值的充要条件是：

$$\left[\frac{n}{k}\right]\leqslant n_i\leqslant\left\lceil\frac{n}{k}\right\rceil\qquad(i=1,2,\cdots,k)$$

事实上，若 $n_1\geqslant n_2+2$，有

$$\binom{n_1}{r}+\binom{n_2}{r}>\binom{n_1-1}{r}+\binom{n_2+1}{r}$$

故有

$$m(H)\leqslant m(H_{n,k}^r)$$

同时也证明了只有当 $k$- 着色 $(S_1,S_2,\cdots,S_k)$ 是一致时，等号成立。

对 $m_k(n,r)$ 的计算是非常困难的。当 $n\geqslant 3$ 时，由于 $K_3$ 不是 2- 可着色，故 $m_2(n,2)=3$；由于 $K_5^3$ 不是 2- 可着色，故 $m_2(5,3)\leqslant 10$；当 $n\geqslant 7$ 时，由于 $P_7$ 不是 2- 可着色，故 $m_2(n,3)\leqslant 7$。在图的情况下，容易得到当 $n\geqslant k+1$ 时，$m_k(n,2)=\binom{k+1}{2}$，其唯一的极图是 $K_{k+1}$(见 Graphs，第 15 章，定理 4)。

**定理 7**(Erdös [1963])　当 $r \geqslant 2, k \geqslant 2, n \geqslant kr$ 时,有

$$m_k(n,r) \geqslant k^{r-1}$$

**证**　令 $X$ 是 $n$ 元集,又令 $\pi = (S_1, S_2, \cdots, S_k)$ 是 $X$ 的一个有序 $k$- 分划。也就是 $k$ 个不相交的子集(允许有空子集)的序列,它的并为 $X$。考虑以 $X$ 的 $r$- 元子集为顶点的超图 $H_0 = (E_\pi | \pi)$,其边

$$E_\pi = \{Y | Y \subset X, |Y| = r, \text{且存在 } S_i, \text{使 } Y \subset S_i\}$$

每个 $X$ 上不是 $k$- 可着色的 $r$- 一致超图的边集是 $H_0$ 的一个横贯,反之亦然。因此,

$$m_k(n,r) = \tau(H_0)$$

一个有序的 $k$- 分划可看成一个 $\{1,2,\cdots,n\}$ 到 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的映射,故有 $m(H_0) = k^n$,且有 $\Delta(H_0) = k^{n-r} \times k$。

由第 3 章中的定理 1,有

$$m_k(n,r) = \tau(H_0) \geqslant \frac{m(H_0)}{\Delta(H_0)} = k^{r-1}$$

**注**　利用不等式 $\tau(H_0) \geqslant \tau^*(H_0)$ 及多少有点复杂的代数运算,可改进定理 7 中的下界。

当 $k = 2$ 时,$m_k(n,r)$ 的最好下界由 Beck [1977],[1978] 得到:对任给的 $\epsilon > 0$ 和 $n \geqslant n(\epsilon)$,有 $m_2(n,r) \geqslant 2^r r^{\frac{1}{3}-\epsilon}$。不等式 $m_2(n,r) \leqslant 2^r r^2$ 分别由 Erdös [1964] 和 Schmidt [1964] 给出,Seymour [1974] 给出它的改进,如 $m_2(n,4) \leqslant 23$, $m_2(n,5) \leqslant 51$。

**推广**(Hansen, Loréa [1978])　$H$ 是 $n$ 阶超图,满足

$$\sum_{E \in H} \frac{k^{-|E|}(k^2 - k + 1)}{|E|} \cdot \sum_{E \in H} k^{-|E|} < 1$$

则 $\chi(H) \leqslant k$。

(其证明与定理 5 的推广的证明类似)

**推论 1**(Johnson [1976])　若 $r \geqslant 2, k \geqslant 2, n \geqslant kr$,则有

$$m_k(n,r) \geqslant \frac{rk^r}{r + k(k-1)}$$

**推论 2**(Schmidt [1964], Herzog, Schönheim [1972])　若 $r \geqslant 2, k = 2, n \geqslant 2r$,则有

$$m_2(n,r) \geqslant \frac{r \cdot 2^r}{r+2}$$

$k = 2$ 时的上界由 Erdös [1964], Chvátal [1971], Beck [1977], Erdös 和 Spencer [1974] 给出。一些与最大度或边数相联系的上界是由 Erdös 和 Lovász [1975] 给出的。

下面考虑 $m_k^0(n,r)$ 的界。

**定理 8** 设 $r\geqslant 2,k\geqslant 2,n\geqslant kr$。在 $n$ 元集 $X$ 的一个一致 $k$- 中，设有 $q_1$ 个含有 $\left[\frac{n}{k}\right]$ 个元素的类，有 $q_2$ 个含有 $\left\{\frac{n}{k}\right\}$ 个元素的类，则有

$$m_k^0(n,r)\geqslant\binom{n}{r}\left[q_1\binom{[n/k]}{r}+q_2\binom{\{n/k\}}{r}\right]^{-1}$$

**证** 与定理 7 的证明中那样，在 $X$ 的 $r$ 元子集构成的集合上定义超图 $H_0=(E_\pi|\pi)$。对每个一致 $k$- 分划 $\pi=(S_1,S_2,\cdots,S_k)$，其边为

$$E_\pi=\{Y|Y\subset X,|Y|=r,\text{且存在 }S_i,\text{使 }Y\subset S_i\}$$

显然 $H_0$ 是正则的，也是一致的，且秩为

$$r(H_0)=q_1\binom{[n/k]}{r}+q_2\binom{\{n/k\}}{r}$$

因此，用第 3 章的定理 1 可得到

$$m_k^0(n,r)=\tau(H_0)\geqslant\frac{n(H_0)}{r(H_0)}=\binom{n}{r}\left[q_1\binom{[n/k]}{r}+q_2\binom{\{n/k\}}{r}\right]^{-1}$$

**注** 当 $r=2$ 时，已知 $m_k^0(n,r)$ 的精确值。下面给出若干 $n$ 阶而非一致 $k$- 着色的图的例子。

若 $n\leqslant k$，每个 $n$ 阶图有一致 $k$- 着色。

若 $n>k$，考虑由 $k+1$ 个顶点的团 $K_{k+1}$ 和 $n-k-1$ 个点构成的独立集 $S_{n-k-1}$ 的并所成的图 $G_1(n,k)$。这个图显然是 $n$ 阶的，并且没有 $k$- 着色，即 $G_1(n,k)$ 不存在一致 $k$- 着色。

若 $k<n\leqslant 2k$，考虑由团 $K_{2k-n+1}$ 和独立集 $S_{2n-2k-1}$ 的并再加上把 $S_{2n-2k-1}$ 中的每个顶点与 $K_{2k-n+1}$ 的每个顶点相连接的边全体，所得图记为 $G_2(n,k)$。图 $G_2(n,k)$ 是 $n$ 阶的，且不存在一致 $k$- 着色，作为习题留给读者。

若 $n\geqslant 2k$，考虑图 $G_3(n,k)$，其顶点集合为 $A\cup B\cup C$，这里 $A$ 仅含 1 个顶点，$B$ 含 $n-\left[\frac{n}{k}\right]+1$ 个顶点，$C$ 含 $\left[\frac{n}{k}\right]-2$ 个顶点；$A$ 中的顶点与 $B$ 中每个顶点相连的边为其边集。图 $G_3(n,k)$ 是 $n$ 阶的，且不存在一致 $k$- 着色，作为习题留给读者。

因此，对每个 $n>k$，$n$ 阶不存在一致 $k$- 着色的图的最少边数满足

(1) $m_k^0(n,2)\leqslant\min\limits_i m[G_i(n,k)]$

事实上，Berge 和 Sterboul [1977] 证明了 (1) 式等号成立，且刻画了 $n$ 阶不存在一致 $k$- 着色其边数为 $m_k^0(n,2)$ 的这类图的结构。

同样可以讨论独立数的极值问题。

**性质** 令 $n,p,r$ 是整数，满足 $n\geqslant p\geqslant r\geqslant 2$，则 $n$ 阶 $r$- 一致超图且独立数 $\alpha(H)\geqslant p$ 的最大边数为

$$\max_{\alpha(H)\geqslant p} m(H) = \binom{n}{r} - \binom{n}{p}$$

**证** 事实上,令 $X$ 为 $n$ 元集,$S \subset X$,$|S| = p$,有唯一满足性质中条件的 $r$-一致极超图:

$$H_0 = (E|E \subset X, |E| = r, E \cap (X - S) \neq \varnothing)$$

故有

$$m(H_0) = \binom{n}{r} - \binom{p}{r}$$

对 $n \geqslant p \geqslant r \geqslant 2$,令

$$\mathscr{H}(n,r) = \{H | H \text{ 为 } n \text{ 阶 } r\text{- 一致超图}\}$$

**Turán 数** $T(n,p,r)$ 定义为 $\mathscr{H}(n,r)$ 中满足 $X$ 中的任一 $p$ 阶顶点子集至少含一条边的超图的最少边数,即

$$T(n,p,r) = \min_{\substack{\alpha(H)<p \\ H\in\mathscr{H}(n,r)}} m(H)$$

**例 1**(Turán [1941]) $X$ 是一个 $n$ 元集,$(S_1, S_2, \cdots, S_{p-1})$ 是 $X$ 的一个一致 $(p-1)$- 分划。在 $X$ 上构造图 $G_{n,p-1}$,$X$ 中两个顶点相邻当且仅当它们属于某个 $S_i$,于是 $\alpha(G_{n,p-1}) < p$。Turán 证明这个图是唯一满足上述性质且边数最少的图。因此,

$$T(n,p,2) = m(G_{n,p-1})$$

(见 Graphs,第 13 章,定理 5)

**例 2** 考虑 $X = \{1,2,\cdots,9\}$ 上的 3- 一致超图 $H$,其边为 123,456,789,147,258,369,159,267,348,168,249,357。它是秩为 3 的仿射平面。可以证明这是一个 3- 一致超图且 $\alpha < 5$ 的唯一极超图。因此 $T(9,5,3) = 12$。

极少数几个值 $T(n,p,r)$ 是已知的,但当 $n \to \infty$ 时函数 $T(n,p,r)\binom{n}{r}^{-1}$ 的极限是 $t(p,r)$(Katona, Nemetz, Simonovits [1964])。当 $p > r \geqslant 3$ 时,$t(p,r)$ 的值均是未知的,但已知 $t(p,r) \geqslant \binom{p-1}{r-1}^{-1}$(见 de Caen [1983])和 $t(r+1,r)$ 的最好上界(见 Frankl 和 Rödl [1985])。

**定理 9** 当 $n \geqslant p \geqslant r \geqslant 2$ 时,有

(1) $T(n,p,r) \geqslant \binom{n}{r}\binom{p}{r}^{-1}$

(2) $T(n,p,r) \leqslant \left[1 + \log\binom{n-r}{p-r}\right]\binom{n}{r}\binom{p}{r}^{-1}$

**证** 设 $X$ 是 $n$ 元集,$H_0$ 是以 $X$ 的 $r$- 元子集为顶点的一致超图 $H = (E_S | S \subset X, |S| = p)$,其中 $E_S = \{S' | S' \subset S, |S'| = r\}$,则

$$T(n,p,r) = \tau(H_0)$$

此外

$$n(H_0)=\binom{n}{r},\qquad r(H_0)=\binom{p}{r},$$
$$m(H_0)=\binom{n}{p},\qquad \Delta(H_0)=\binom{n-r}{p-r}$$

由第 3 章定理 1 的推论 3,有

$$T(n,p,r)=\tau(H_0)\geqslant\frac{m(H_0)}{\Delta(H_0)}=\frac{n(H_0)}{r(H_0)}=\binom{n}{r}\binom{p}{r}^{-1}$$

即得(1)式。

又从第 3 章的定理 12 可得(2),

$$T(n,p,r)=\tau(H_0)\leqslant[1+\log\Delta(H_0)]\tau^*(H_0)$$
$$=\left[1+\log\binom{n-r}{p-r}\right]\binom{n}{r}\binom{p}{r}^{-1}$$

**注** 不等式(1)最早被 Katona, Nemetz, Simonovits [1964] 用另外的方法得到。用 Moon, Moser 和 de Caen [1983] 的推广定理把(1)式改进为

$$(3)\quad T(n,p,r)\geqslant\frac{n-p+1}{r}\binom{n}{r-1}\binom{p-1}{r-1}^{-1}$$

(对于 Turán 数的综述,读者可查阅 Brouwer, Voorhoeve [1978])

Schönheim [1964] 改进了(2)式的界。

**推论** $H$ 是 $n$ 阶、$m$ 条边的 $r$- 一致超图,则 $\alpha(H)\geqslant nm^{-\frac{1}{r}}$。

事实上,若存在整数 $p$ 满足 $m\leqslant(np^{-1})^r$,则 $m<\binom{n}{r}\binom{p}{r}^{-1}$,又由(1)式,$m<T(n,p,r)$。也就是说,$p<nm^{-\frac{1}{r}}$ 蕴含着 $\alpha(H)\geqslant p$,因此,

$$\alpha(H)\geqslant nm^{-\frac{1}{r}}$$

## 5 完全超图的好边着色

设 $k(\geqslant 2)$ 是一个整数。超图 $H$ 的对偶超图 $H^*$ 的弱 $k$- 着色定义为 $H$ 的**弱 $k$- 边着色**。因而存在边的分划 $H=H_1+H_2+\cdots+H_k$,使得对每个度数大于 1 的顶点 $x$,其星 $H(x)$ 中至少有两条着不同颜色的边。$H$ 的**好 $k$- 边着色**是 $H$ 的弱 $k$- 边着色,使得若 $d_H(x)\geqslant k$,每种颜色在星 $H(x)$ 中的边至少出现一次,而对 $d_H(x)\leqslant k$ 的星 $H(x)$,所有边着的颜色不同。$H$ 的**强 $k$- 边着色**是一个边的分划 $H=H_1+H_2+\cdots+H_k$,使得在每个星 $H(x)$ 中,所有边着的颜色均不同。超图 $H$ 存在强 $k$- 边着色的最小值 $k$ 称为 $H$ 的**边色数**,也就是强色数 $\gamma(H^*)$。

在这一节中,将确定 $k$ 为何值时,使 $r$- 部完全超图和 $r$- 完全超图有好 $k$- 边着色。

**定理 10**(Meyer [1975]) 对每个 $k(\geqslant 2)$,完全 $r$- 图有好 $k$- 边着色。

(*)证 设$H = K^r_{n_1, n_2, \cdots, n_r}$，$1 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_r$，令$X^i = \{0,1,\cdots,n_i - 1\}$表示第$i$类顶点集。

由第1章中的定理9知$p = \prod_{i \neq 1} n_i = \Delta(H)$。下面给边$\bar{x} = x^1 x^2 \cdots x^r$着$(\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_r)$色，这里

$$\alpha_i = [x^i + x^1]_{n_i}$$

于是得到$H$的一个强$p$-边着色。故对$k \leqslant p$时，存在一个好$k$-边着色；若$k > p$，则上述的$p$-边着色与$k - p$个空色类一起成为$H$的一个好$k$-边着色。

下面也能证明对$n_q \leqslant s \leqslant n_{q+1}$及$p = s \prod_{\substack{i \neq q \\ i \neq q+1}} n_i$时，给边$\bar{x}$着$(\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_r)$色，其中

$$\alpha_i = \begin{cases} [x^{i-1} + x^i]_{n_i - 1} & 若 2 \leqslant i \leqslant q \\ [x^q + x^{q+1}]_s & 若 i = q + 1 \\ [x^{i-1} + x^i]_{n_i} & 若 q + 1 < i \leqslant r \end{cases}$$

是一个好$p$-边着色。对$k \leqslant \prod_{i \neq r} n_i = \min d_H(x)$，在上面所定义的$p$-边着色$(S_1, S_2, \cdots, S_p)$中取$q + 1 = r, s = n_{r-1}$，组成一个好$k$-边着色$(S_1, S_2, \cdots, S_{k-1}, \bigcup_{i=k}^{p} S_i)$。对于其他$k$，可用类似的方法来找$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$(读者可参阅Meyer[1975])。

我们还注意到定理10的推广(不给证明)。

**推广**(Baranyai[1978]) 对每个$k \geqslant 2$，完全$r$-部超图的边集有一个均匀的一致$k$-边着色。

Baranyai对阶数$n$进行归纳证明了超图$K^r_n$的边存在好$k$-边着色。为了能归纳，需一个更强的表述，然后才去证明它。首先，超图$H$称为是**几乎正则的**，若它满足

$$|d_H(x) - d_H(y)| \leqslant 1 \qquad (x, y \in X)$$

**引理1** 设$H$是$X$上的超图。若对顶点$a \in X$，$X - \{a\}$上的诱导子图$H'$是几乎正则的，且满足

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{E \in H} |E|\right] \leqslant d_H(a) \leqslant \left\{\frac{1}{n} \sum_{E \in H} |E|\right\}$$

则$H$是几乎正则的。

(*)证 令$\alpha = \sum_{E \in H} |E|$，则$\left[\frac{\alpha}{n}\right] \leqslant d_H(a) \leqslant \left\{\frac{\alpha}{n}\right\}$，对$x \neq a$，由于$H'$是几乎正则的，故有

$$\left[\frac{\alpha - d_H(a)}{n - 1}\right] \leqslant d_H(x) = d_{H'}(x) \leqslant \left\{\frac{\alpha - d_H(a)}{n - 1}\right\}$$

注意到

$$\left[\frac{\alpha}{n}\right]=\left[\frac{\alpha-\left\{\frac{\alpha}{n}\right\}}{n-1}\right],\qquad \left\{\frac{\alpha}{n}\right\}=\left\{\frac{\alpha-\left[\frac{\alpha}{n}\right]}{n-1}\right\}$$

于是有

$$\left[\frac{\alpha}{n}\right]\leqslant d_H(x)\leqslant\left\{\frac{\alpha}{n}\right\}\qquad (x\neq a)$$

因此 $H$ 是几乎正则的。

**引理 2** 设 $\epsilon_{ij}$ 是一组非负实数，$i=1,2,\cdots,s$，$j=1,2,\cdots,t$，则存在一组整数 $e_{ij}\geqslant 0$，使得

(ⅰ) $[\epsilon_{ij}]\leqslant e_{ij}\leqslant\{\epsilon_{ij}\}$

(ⅱ) $\left[\sum_i\epsilon_{ij}\right]\leqslant\sum_i e_{ij}\leqslant\left\{\sum_i\epsilon_{ij}\right\}$

(ⅲ) $\left[\sum_j\epsilon_{ij}\right]\leqslant\sum_j e_{ij}\leqslant\left\{\sum_j\epsilon_{ij}\right\}$

(*)证　考虑由两个集合 $S$ 和 $T$，源为 $a$，汇为 $z$ 所构成的运输网络 $R$。$R$ 的每条弧容量的上、下界有三种类型：

(1) 弧 $(a,i)$，$i\in S$ 上的流 $\psi$ 满足

$$\left[\sum_j\epsilon_{ij}\right]\leqslant\psi(a,i)\leqslant\left\{\sum_j\epsilon_{ij}\right\}$$

(2) 弧 $(i,j)$，$i\in S$，$j\in T$ 上的流 $\psi$ 满足

$$[\epsilon_{ij}]\leqslant\psi(i,j)\leqslant\{\epsilon_{ij}\}$$

(3) 弧 $(j,z)$，$j\in T$ 上的流 $\psi$ 满足

$$\left[\sum_j\epsilon_{ij}\right]\leqslant\psi(j,z)\leqslant\left\{\sum_i\epsilon_{ij}\right\}$$

一个整数容量的网络存在实值流和整流的充要条件是相同的(见 Graphs，第 5 章，§2)。由于网络 $R$ 含有一个实值流 $\bar\psi$，$\bar\psi(i,j)=\epsilon_{ij}$，因此 $R$ 含有一个整流 $\psi$，其整数 $\psi(i,j)=e_{ij}$ 满足条件(ⅰ)，(ⅱ)和(ⅲ)。

**Baranyai 的引理**　设 $n$，$r_i$ 和 $m_{ij}$ 是整数，$i\in I$，$j\in J$，满足

(Ⅰ) $0\leqslant r_i\leqslant n\qquad (i\in I)$

(Ⅱ) $m_{ij}\geqslant 0\qquad (i\in I,j\in J)$

(Ⅲ) $\sum_{j\in J}m_{ij}=\binom{n}{r_i}\qquad (i\in I)$

则存在 $n$ 元集 $X$ 和 $X$ 的子集簇 $H_{ij}=(E_{ij}(\lambda))$ 满足

(1) $m(H_{ij})=m_{ij}$

(2) $H_i=\sum_{j\in J}H_{ij}$ 是完全超图 $K_n^{r_i}$

(3) $H_j=\sum_{i\in I}H_{ij}$ 是几乎正则的，即

$$\left\lfloor \frac{1}{n}\sum_{E\in H_j}|E| \right\rfloor \leqslant d_{H_j}(x) \leqslant \left\lceil \frac{1}{n}\sum_{E\in H_j}|E| \right\rceil \qquad (x\in X)$$

(*)**证** 用归纳法。假设对小于 $n$ 的正整数上述结论正确,下面证明对 $n$ 也正确。对于 $n$,考虑下面满足(Ⅰ),(Ⅱ)和(Ⅲ)的整数表(见图 1)。

图 1

由于当 $r_{i_0}=0$ 时,由(Ⅲ)知 $\sum_j m_{i_0 j}=1$ 及 $H_{i_0}=\varnothing$,故可将矩阵中使 $r_{i_0}=0$ 对应的第 $i_0$ 行删除。类似地,当 $r_{i_1}=n$ 时,由(Ⅲ)知 $H_{i_1}=(X)$,故可将 $r_{i_1}=n$ 对应的行删除而不影响结论。

在完成上面的删除后,下面考虑 $n-1$ 情况下的新表(见图 2)。

图 2

这里整数 $e_{ij}$ 满足引理2中的(ⅰ),(ⅱ)和(ⅲ),其中 $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{n}r_i m_{ij}$。在新表中的这些整数满足:

(Ⅰ′) $0\leqslant r_i-1\leqslant n-1$

(Ⅰ″) $0 \leqslant r_i \leqslant n-1$

(Ⅱ′) $e_{ij} \geqslant 0$

(Ⅱ″) $m_{ij} - e_{ij} \geqslant 0$

为了得到(Ⅱ″),考察下式

$$m_{ij} - e_{ij} \geqslant \frac{r_i m_{ij}}{n} - e_{ij}$$

不等式左边为整数,故由引理 2 中的(ⅰ),有

$$m_{ij} - e_{ij} \geqslant \left\lfloor \frac{r_i m_{ij}}{n} \right\rfloor - e_{ij} \geqslant 0$$

由(ⅲ)和(Ⅲ),还有

$$\sum_j e_{ij} \geqslant \left[ \sum_j \frac{r_i m_{ij}}{n} \right] = \left[ \binom{n}{r_i} \frac{r_i}{n} \right] = \binom{n-1}{r_i-1}$$

同理可得相反的不等式。故有

(Ⅲ′) $\sum_j e_{ij} = \binom{n-1}{r_i-1}$

最后可得

(Ⅲ″) $\sum_j [m_{ij} - e_{ij}] = \binom{n}{r_i} - \binom{n-1}{r_i-1} = \binom{n-1}{r_i}$

由归纳假设,存在 $n-1$ 元集合 $\bar{X}$,$\bar{X}$ 的子集簇 $\bar{H}_{ij} = (\bar{E}_{ij}(\lambda))$ 和 $\bar{\bar{H}}_{ij} = (\bar{\bar{E}}_{ij}(\lambda))$,满足

(1′) $m(\bar{H}_{ij}) = e_{ij}$

(1″) $m(\bar{\bar{H}}_{ij}) = m_{ij} - e_{ij}$

(2′) $\sum_j \bar{H}_{ij} = K_n^{r_i - 1}$

(2″) $\sum_j \bar{\bar{H}}_{ij} = K_{n-1}^{r_i}$

(3) $\sum_i \bar{H}_{ij} + \sum_i \bar{\bar{H}}_{ij}$ 是几乎正则的

考虑一个新顶点 $a$,令 $X = \bar{X} \cup \{a\}$ 和

$$E_{ij}(\lambda) = \begin{cases} \bar{E}_{ij}(\lambda) \cup \{a\} & 1 \leqslant \lambda \leqslant e_{ij} \\ \bar{\bar{E}}_{ij}(\lambda) & e_{ij} + 1 \leqslant \lambda \leqslant m_{ij} \end{cases}$$

显然,超图 $H_{ij} = (E_{ij}(\lambda) | 1 \leqslant \lambda \leqslant m_{ij})$满足

$$\sum_{j \in J} H_{ij} = K_n^{r_i}$$

且

$$\sum_{i,\lambda} \frac{|E_{ij}(\lambda)|}{n} = \sum_i \frac{r_i m_{ij}}{n}$$

因此,当 $x \neq a$ 时,有

$$\left\lfloor \frac{1}{n}\sum_{i,\lambda} |E_{ij}(\lambda)| \right\rfloor \leqslant d_{H_j}(x) \leqslant \left\lceil \frac{1}{n}\sum_{i,\lambda} |E_{ij}(\lambda)| \right\rceil$$

由引理 1 可知，$H_j = \sum_i H_{ij}$ 是几乎正则的。

**定理 11**(Baranyai[1975]) 设 $n, r$ 是整数，且 $n \geqslant r \geqslant 2$。令 $m_1, m_2, \cdots, m_t$ 是非负整数，满足 $m_1 + m_2 + \cdots + m_t = \binom{n}{r}$，则 $K_n^r$ 可分解为 $t$ 个边不相交的超图 $H_j$ 之和，且每个 $H_j$ 满足

(1) $m(H_j) = m_j$

(2) $\left\lfloor \frac{rm_j}{n} \right\rfloor \leqslant d_{H_j}(x) \leqslant \left\lceil \frac{rm_j}{n} \right\rceil \qquad (x \in X)$

在 Baranyai 的引理中取 $|I| = 1$ 时就可得此结论。

**推论 1**(Baranyai) $K_n^r$ 可分解为边两两不交的 $h$- 正则部分超图 $H_j$ 的充要条件是 $r \mid hn$ 和 $\frac{hn}{r} \mid \binom{n}{r}$。在这种情况下，这些 $H_j$ 组成 $K_n^r$ 的一个一致边着色。

**证** 设 $K_n^r$ 可分解为边两两不相交的 $h$- 正则超图 $H_j$，则通过两种不同的方法计算点 - 边关联图的边数，故有 $rm(H_j) = hn$。因此 $r \mid hn$ 和 $\frac{hn}{r} = m(H_j)$ 整除 $m(K_n^r) = \binom{n}{r}$。

反之，若上述条件满足，取 $m_j = \frac{hn}{r}$，$t = \binom{n}{r}\frac{r}{hn}$，由定理 11，$K_n^r$ 可分解为 $t$ 个超图 $H_j$，使得

$$h = \left\lfloor \frac{rm_j}{n} \right\rfloor \leqslant d_{H_j}(x) \leqslant \left\lceil \frac{rm_j}{n} \right\rceil = h$$

因此超图 $H_j$ 是 $h$- 正则的。

**推论 2** 完全图 $K_n$ 是 $h$- 正则图的并的充要条件是：$hn$ 为偶数且 $\frac{hn}{2} \mid \binom{n}{2}$。

**推论 3**(Baranyai) $K_n^r$ 具有边着色性质当且仅当 $r \mid n$。在这种情况下，存在一个一致的最优边着色。

**证** 由于 $\frac{n}{r}$ 整除 $\binom{n}{r}$，其商为 $\binom{n-1}{r-1}$。故对 $h = 1$，由推论 1，可得结论。

**推论 4**(Baranyai) $K_n^r$ 的边色数是

$$q(K_n^r) = \left\lceil \binom{n}{r}\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor^{-1} \right\rceil$$

**证** 设 $K_n^r = H_1 + H_2 + \cdots + H_q$ 是 $K_n^r$ 的边的 $q = q(K_n^r)$- 匹配分解，则有

$$\binom{n}{r} = m(K_n^r) = |H_1| + |H_2| + \cdots + |H_q| \leqslant q\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$$

因此,

$$q(K_n^r) \geqslant \left\{ \binom{n}{r} \left[ \frac{n}{r} \right]^{-1} \right\}$$

另一方面,令 $t = \left\{ \binom{n}{r} \left[ \frac{n}{r} \right]^{-1} \right\}$, $m_1 = m_2 = \cdots = m_{t-1} = \left[ \frac{n}{r} \right]$, $m_t = \binom{n}{r} - (t-1)\left[ \frac{n}{r} \right] \leqslant \left[ \frac{n}{r} \right]$,则由定理 11,存在分解

$$K_n^r = H_1 + H_2 + \cdots + H_t$$

使得对每个 $x \in X$,有

$$0 \leqslant d_{H_i}(x) \leqslant \left\{ \frac{r}{n} \left[ \frac{n}{r} \right] \right\} = 1$$

这是 $K_n^r$ 的一个强 $t$- 边着色,故 $q(K_n^r) \leqslant t$。因此,

$$q(K_n^r) = \left\{ \binom{n}{r} \left[ \frac{n}{r} \right]^{-1} \right\}$$

**推论 5** 设 $K_n^r = H_1 + H_2 + \cdots + H_p$ 是 $K_n^r$ 的边覆盖分解,其中 $H_i$ 是 $X$ 上的超图,$i = 1, 2, \cdots, p$。若记 $p(K_n^r)$ 为使得 $K_n^r$ 存在上述分解的最大整数 $p$,则

$$p(K_n^r) = \left[ \binom{n}{r} \left\{ \frac{n}{r} \right\}^{-1} \right]$$

证明与上类似。

**推论 6** $K_n^r$ 的边集存在好 $k$- 边着色的充要条件是:

$$k \leqslant \left[ \binom{n}{r} \left\{ \frac{n}{r} \right\}^{-1} \right] \quad \text{或} \quad k \geqslant \left\{ \binom{n}{r} \left[ \frac{n}{r} \right]^{-1} \right\}$$

**证** 利用推论 4 和 5,有

$$\begin{aligned} p(K_n^r) &= \left[ \binom{n}{r} \left\{ \frac{n}{r} \right\}^{-1} \right] \leqslant \binom{n}{r} \left\{ \frac{n}{r} \right\}^{-1} \leqslant \Delta(K_n^r) = \binom{n}{r} \frac{r}{n} \\ &= \binom{n}{r} \left[ \frac{n}{r} \right]^{-1} \leqslant \left\{ \binom{n}{r} \left[ \frac{n}{r} \right]^{-1} \right\} = q(K_n^r) \end{aligned}$$

若 $k < q(K_n^r)$,$K_n^r$ 不存在强 $k$- 边着色;若 $k > p(K_n^r)$,$K_n^r$ 不存在 $k$- 覆盖分解。因此没有好 $k$- 边着色。

另一方面,若 $k \geqslant q(K_n^r)$,可以在 $q(K_n^r)$- 边着色中加一些空类得到 $K_n^r$ 的一个好 $k$- 边着色。若 $k \leqslant p(K_n^r)$,在 $K_n^r$ 的 $p(K_n^r)$- 覆盖分解中,将后面的 $p(K_n^r) - k$ 个类并入到最后一个类中,得到 $K_n^r$ 的一个 $k$- 覆盖分解。

## 6 极值问题的应用

由前面结果,我们能部分地回答下面问题:阶数不超过 $n$ 且不存在 $k+1$ 条两两不相交的边的 $r$- 一致超图的最多边数是多少?并把它记为

$$M'_k(n,r) = \max_{\nu(H)\leqslant k} m(H)$$

在图的情况下，这一问题已被 Erdös 和 Gallai[1959]所解决（见 Graphs，第7章，定理2）。

**定理 12** 设 $n,k,r$ 是满足 $n \geqslant r \geqslant 2, n \geqslant kr$ 的整数。若令

$$q = \left\{\binom{n}{r}\Big/\left[\frac{n}{r}\right]\right\}$$

则

$$M'_k(n,r) \leqslant (q-1)k + \min\left\{k, \binom{n}{r} - (q-1)\left[\frac{n}{r}\right]\right\}$$

**证** 设 $H$ 是 $n$ 元集 $X$ 上的 $r$- 一致超图，不含 $k+1$ 条边的匹配且边数是最多的。由定理 11 的推论 4，考虑 $X$ 上 $r$- 完全超图 $K_n^r$ 的 $q$- 匹配分解

$$K_n^r = H_1 + H_2 + \cdots + H_q$$

其中，

$$m(H_j) = \left[\frac{n}{r}\right] \qquad (j = 1,2,\cdots,q-1)$$

$$m(H_q) = \binom{n}{r} - (q-1)\left[\frac{n}{r}\right]$$

超图 $H$ 对每个 $j \leqslant q-1$ 至多有 $k$ 条边含在 $H_j$ 中，而至多有

$$\min\left\{k, \binom{n}{r} - (q-1)\left[\frac{n}{r}\right]\right\}$$

条边含在 $H_q$ 中。因此，

$$M'_k(n,r) = m(H) \leqslant k(q-1) + \min\left\{k, \binom{n}{r} - (q-1)\left[\frac{n}{r}\right]\right\}$$

**注** 当 $k=1, r\leqslant \frac{n}{2}$ 时，由 EKR 定理，$M'_1(n,r) = \binom{n-1}{r-1}$，且当 $r < \frac{n}{2}$ 时，其唯一的极超图是星 $K_n^r(x_0)$。

若 $n \leqslant kr + (r-1)$，则 $M'_k(n,r) = \binom{n}{r}$，其唯一的极超图是 $K_n^r$。

若 $n \geqslant kr + r$，考虑 $n$ 元集 $X$ 和 $X$ 的 $k$ 元子集 $Y$，令

$$\mathscr{E}_{n,k}^r = (E \mid E \subset X, |E| = r, E \cap Y \neq \varnothing)$$

由于 $\mathscr{E}_{n,k}^r$ 中每条边与 $Y$ 相交，故超图 $\mathscr{E}_{n,k}^r$ 中不存在 $k+1$ 条两两不相交的边。Erdös[1965] 证明了当 $n > c_r k$ 时，这里 $c_r$ 是仅依赖于 $r$ 的常数，$\mathscr{E}_{n,k}^r$ 是一个极超图。也就是说

$$M'_k(n,r) = m(\mathscr{E}_{n,r}^k) = \binom{n}{r} - \binom{n-k}{r}$$

此外，Erdös 猜测：对每个 $n \geqslant kr + r$，超图 $K_{kr+r-1}^r$ 或 $\mathscr{E}_{n,k}^r$ 之一是极超图，因此有

$$M'_k(n,r) = \max\left\{\binom{kr+r-1}{r}, \binom{n}{r} - \binom{n-k}{r}\right\}$$

当 $n$ 充分大时，$\mathscr{E}^r_{n,k}$ 是否为仅有的极超图?Bollobás, Daykin 和 Erdös[1980] 证明了每一个满足下列条件的 $r$- 一致超图 $H$:

$$n(H) > 2r^3k$$

$$m(H) > m(\mathscr{E}^r_{n,k}) - \binom{n-k-r}{r-1} + 1$$

$$\nu(H) \leqslant k$$

含于 $\mathscr{E}^r_{n,k}$ 中。

## 7 Kneser 的问题

本节考虑与超图边色数类似的对偶问题:用交簇覆盖超图 $H$ 的边的最少个数是多少?这个新的参数记为 $\tau_0(H)$,常称为 **Kneser 数**,其性质类似于横贯数 $\tau(H)$。由于能用 $\tau(H)$ 个星覆盖 $H$ 的所有边,故 $\tau_0(H) \leqslant \tau(H)$。若 $H$ 具有 Helly 性质,显然有 $\tau_0(H) = \tau(H)$。

$\tau_0(H)$ 的研究与 $\Delta_0(H)$ 和每条边至少被覆盖 $k$ 次的交簇的最小边数 $\rho_k(H)$ 是密不可分的。参数

$$\tau_0^*(H) = \min_{k\geqslant 1} \frac{\rho_k(H)}{k}$$

常称为**分数 Kneser 数**。

**定理 13** 对每个超图 $H$,有

$$\nu(H) \leqslant \max_{H'\subset H} \frac{m(H')}{\Delta_0(H')} \leqslant \tau_0^*(H) = \min_{k\geqslant 1} \frac{\rho_k(H)}{k}$$

$$\leqslant \max_{k\geqslant 1} \frac{\rho_k(H)}{k} = \tau_0(H) \leqslant \tau(H)$$

**证** 对在 $X$ 上的超图 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$,构造以 $H$ 的交簇作为顶点的超图 $\bar{H} = (\bar{E}_1, \bar{E}_2, \cdots, \bar{E}_m)$,这里 $\bar{E}_i$ 是交簇中含 $E_i$ 的全体,则 $E_i \cap E_j = \varnothing$ 当且仅当 $\bar{E}_i \cap \bar{E}_j = \varnothing$,此外有

$$\nu(\bar{H}) = \nu(H)$$

$$\Delta(\bar{H}) = \Delta_0(H)$$

$$\tau_k(\bar{H}) = \rho_k(H)$$

$$\tau(\bar{H}) = \tau_0(H)$$

$$\tau^*(\bar{H}) = \tau_0^*(H)$$

把第 3 章中的定理 1 应用到超图 $\bar{H}$ 上,我们就得所述的不等式。

**例1** $P_7$ 是7个顶点的射影平面,则有

$$\Delta_0(P_7) = 7$$

$$\tau_0(P_7) = 1$$

由定理13,有

$$1 = \nu(P_7) \leqslant \tau_0^*(P_7) \leqslant \tau_0(P_7) = 1$$

故也有 $\tau_0^*(P_7) = 1$。

**例2** $K_n^r$ 是 $r$- 完全超图,且 $r \leqslant \frac{n}{2}$。由 EKR 定理,有

$$\Delta_0(K_n^r) = \binom{n-1}{r-1}$$

注意到 $K_n^r$ 的 $n$ 个星覆盖每条边恰好 $r$ 次,故 $\rho_r(K_n^r) \leqslant n$。又由定理13,有

$$\frac{n}{r} = \binom{n}{r} \Big/ \binom{n-1}{r-1} = \frac{m(K_n^r)}{\Delta_0(K_n^r)} \leqslant \tau_0^*(K_n^r) \leqslant \frac{\rho_r(K_n^r)}{r} \leqslant \frac{n}{r}$$

故 $\tau_0^*(K_n^r) = \frac{n}{r}$。

$\tau_0(K_n^r)$ 的确定首先由 Kneser 在1955年提出,但直到23年后才由 Lovász 利用代数拓扑的方法给予解决。这里是由 Baranyai[1978] 给出的简单证明。

**性质** $H$ 是阶为 $n \geqslant 2r$ 的 $r$- 一致超图,则

$$\tau_0(H) \leqslant n - 2r + 2$$

考虑 $X$ 的 $2r-1$ 元子集 $Y$。$H$ 的含在 $Y$ 中的边的簇 $H|Y$ 是一个交簇。这个交簇与星 $H(x), x \in X - Y$ 一起构成 $H$ 的一个交簇覆盖。因此,

$$\tau_0(H) \leqslant 1 + (n - 2r + 1) = n - 2r + 2$$

**定理14**(Lovász[1978],Baranyai[1978]) 设 $n, r$ 是满足 $2 \leqslant r \leqslant \frac{n}{2}$ 的整数,则有

$$\tau_0(K_n^r) = n - 2r + 2$$

**证** 根据前面的性质,只需证明

$$\tau_0(K_n^r) \geqslant n - 2r + 2$$

用反证法。令 $d = n - 2r$,假设 $K_n^r$ 可分解为 $d + 1 = n - 2r + 1$ 个交簇 $H_1, H_2, \cdots, H_{d+1}$。由 Gale 定理[1956],对任意 $k \geqslant 1$,能把 $d + 2k$ 个顶点放到 $d + 1$ 维空间中的一个球面

$$\boldsymbol{S}^d = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^{d+1}, \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$$

上,使得任意开半球面上至少含有 $k$ 个点。故能把 $K_n^r$ 的 $n = d + 2r$ 个点放到球面 $\boldsymbol{S}^d$ 上,使得 $\boldsymbol{S}^d$ 的任意开半球至少含有 $r$ 个顶点,即至少含有 $K_n^r$ 的一条边。

用 $P_i$ 表示满足以 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}^d$ 为心的 $\boldsymbol{S}^d$ 的开半球含有一条 $H_i$ 中的边的 $\boldsymbol{x}$ 的集合。

由于 $S^d$ 的每个点，以该点为心的开半球总含 $K_n^r$ 的一条边 $E$，而 $E$ 必属于某一个 $H_i$。故有

$$S^d = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_{d+1}$$

由 Borsuk 的"对极点定理"[1933]：若球面 $S^d \subseteq \mathbf{R}^{d+1}$ 是 $d+1$ 个开集的并，则这些开集中存在一个开集包含两个对极点。设开集 $P_{i_0}$ 含有两个对极点 $x$ 和 $y$。以 $x$ 为中心的开半球含一条 $H_{i_0}$ 的边 $E$，以 $y$ 为中心的开半球也包含 $H_{i_0}$ 的一条边 $F$，显然 $E \cap F = \emptyset$。这与 $H_{i_0}$ 是交簇矛盾。

## 习　题　4

1.(§1)　确定 $K_n^r$ 和 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}^r$ 的边色数和独立数。

2.(§1)　$H$ 是 $X$ 上超图。证明：若对任意 $A \subset X$，有 $\alpha(H|A) \geqslant \frac{|A|}{2}$，则 $X$ 能被 $\alpha(H)$ 个边或孤立点所覆盖(Lehel[1982])。

3.(§1)　设 $H$ 是一个超图，$m_1, m_2, \cdots, m_k$ 是正整数。证明：$H$ 能分解为 $k$ 个两两没有公共边的 $H_i$ 的并，且 $\chi(H_i) \leqslant m_i$ 的充要条件是：$\chi(H) \leqslant m_1 m_2 \cdots m_k$(Miller, Müller[1981])。

4.(§1)　$H$ 是秩 $r \geqslant 3$ 的超图，且满足 $|E \cap E'| \leqslant r-2(\forall E, E' \in H, E \neq E')$，则 $\alpha(H) = \alpha$ 满足 $n - \alpha \leqslant \binom{\alpha}{r-1}$。

5.(§1)　在 $n \times n$ 正方形棋盘上定义"王后移动超图"$H_n^Q$：以棋盘上的小方格为顶点，边 $E_x$ 是王后放在小方格 $x$ 上时所能控制的小方格全体(含 $x$ 自己)。类似定义"国王移动超图"$H_n^K$ 等等。证明：

$$\chi(H_n^Q) = \chi(H_n^R) = \chi(H_n^B) = \chi(H_n^K) = 2 \qquad (R\text{：车；}B\text{：象})$$

6.(§1)　考虑顶点为 $1, 2, \cdots, n$，边为满足 $x + y = z$ 的三元集 $\{x, y, z\}$ 的 3-一致超图。证明：这个超图的独立数是 $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$(Sedlaček[1970])。

7.(§1)　考虑一个无限超图：它的顶点是所有正整数，一个等差数列形成的整数子集作为边。证明：这个超图具有 Helly 性质，且边色数是 2①。

8.(§2)　用颜色 $1, 2, \cdots, k$ 给超图 $H$ 的顶点着色：若某条边中的顶点均着不同颜色，则称该边是"强着色的"。用 $\bar{\gamma}(H)$ 表示使得 $X$ 的每个不含空类的 $k$-色分划 $(S_1, S_2, \cdots, S_k)$ 总存在强着色边的最小正整数 $k$，称 $\bar{\gamma}(H)$ 为 $H$ 的**余色数**。证

① 原文中误写为 $\neq 2$。

明：$\bar{\gamma}(K_n^r) = r$。

若 $H$ 是 $n$ 阶 $r$- 一致超图，证明：$\bar{\gamma}(H) \leqslant n - r + 1$。

计算：$\bar{\gamma}(K^r_{n_1,n_2,\cdots,n_r})$。

若图 $G$ 有 $p$ 个连通分支，则 $\bar{\gamma}(G) = p + 1$。令 $G$ 是 $n$ 阶图，$H$ 是以 $G$ 的边为顶点，$G$ 的圈为边的超图。证明：$\bar{\gamma}(H) = n$。

9.(§2)　证明余色数 $\bar{\gamma}(H)$ 和独立数 $\alpha(H)$ 之间满足下式：

$$\bar{\gamma}(H) \leqslant \alpha(H) + 1$$

此外，若 $n \geqslant p \geqslant r \geqslant 2$，则存在一个 $n$ 阶 $r$- 一致超图 $H$，且满足 $\alpha(H) = p - 1$，$\bar{\gamma}(H) = p$(Sterboul [1975])。

10.(§2)　$G$ 是一个图。证明：积 $G \times K_n$(见第 3 章，§6) 满足

$$\bar{\gamma}(G \times K_n) = n(G) + \alpha(G)(n-1) + 1$$

(Sterboul[1975])

11.(§3)　若 $k \geqslant \left\lfloor \frac{\Delta}{2} \right\rfloor + 1$，证明：最大度为 $\Delta$ 的树存在一个一致 $k$- 着色。又若 $k = \left\lfloor \frac{\Delta}{2} \right\rfloor$，则存在一个最大度为 $\Delta$ 的树，它没有一致 $k$- 着色。

12.(§4)　证明：$m_k(n,r) \leqslant \binom{kr-k+1}{r}$。

(Herzog, Schönheim[1972])

13.(§4)　证明：若 $p = \frac{n}{k}$ 是不小于 $r$ 的整数，则

$$m_k^0(n,r) \geqslant \binom{n-1}{r-1}\binom{p-1}{r-1}^{-1}$$

14.(§4)　证明：对 $n \geqslant kr$，有 $m_k^0(n,r) \leqslant T(n-1, p-1, r-1)$，这是 $p = \left[\frac{n}{k}\right]$。

提示：考虑 $n-1$ 阶的 $(r-1)$- 一致极超图 $H_1$ 且不含基数为 $p-1$ 的独立集。在 $H_1$ 的每条边中增加同一顶点 $x_0$，得到一个 $n$ 阶 $r$- 一致超图 $H_0$。证明：$H_0$ 没有一致 $k$- 着色(Berge, Sterboul[1977])。

15.(§4)　设 $H$ 是独立数为 $\alpha$ 的 $n$ 阶 $r$- 一致超图。$T \subset X$，$|T| = r - 1$。证明：$H$ 中含 $T$ 的边的最大数目 $z$ 满足

$$\alpha + \binom{\alpha}{r-1} z \geqslant n$$

从上式可推出这类超图的边数 $m$ 满足

$$\alpha + \binom{\alpha}{r-1} rm \binom{n}{r-1}^{-1} \geqslant n$$

(见 de Caen[1983])

提示:利用定理 9 后面注记中的不等式(3)。

16.(§4) 设 $H$ 是阶为 $n = kr$ 的 $r$- 一致超图,它不存在一致 $k$- 着色,且在此条件下边数[①]最少。证明:$H$ 是 $K_n^r$ 的星(Berge,Sterboul[1977])。

17.(§5) 证明:$K_n^r$ 存在均匀 $k$- 边着色的充要条件是:

$$\left|\left[\binom{n}{r}\frac{r}{kn}\right]\frac{n}{r}\right| \leqslant \binom{n}{r}k^{-1} \leqslant \left[\left|\frac{r}{kn}\binom{n}{r}\right|\frac{n}{r}\right]$$

18.(§7) 整数 $n,k,t$ 满足 $n > k > t > 0, n + t > 2k$。用 $G(n,k,t)$ 表示以 $n$ 元集合中的 $k$ 元子集作为顶点的图,两个 $k$ 元子集 $A$ 和 $B$ 相邻当且仅当 $|A \cap B| < t$,则 $\tau_0(K_n^r)$ 是 $G(n,r,1)$ 的色数。Frankl 猜测:当 $n$ 充分大时,$G(n,r,t)$ 的色数等于 $T(n,k,t)$,他证明了 $t = 2$ 时的情形(Frankl[1985])。

19.(§7) 证明:

$$\tau_0(H) \leqslant \max_i m(H|X - E_i) + 1$$

等号成立仅当 $L(H)$ 的补图中含最大度的连通分支是一个团或是奇图(利用 Brooks 的定理,见 Graphs,第 15 章)。

20.(§7) 直接证明:当 $n \geqslant 3$ 时,$\tau_0(K_n) = n - 2r + 2$。

① 原文误写成顶点数。

# 参 考 文 献

Ahlswede R. ,Coloring hypergraphs, a new approach to multi-user source coding, *J. Combinatorics, Information, Systems sciences* 4,1979,77~115;5,1980,220~268.

Bárány I. ,A short proof of Kneser's conjecture, *J. Comb. Theory* A,25,1978,325~326.

Baranyai Z. ,On the factorization of the complete uniform hypergraph, *Infinite and Finite Sets*, (A. Hajnal, R. Rado, V. T. Sós, eds. ), Coll. Math. J. Bolyai, 10, Bolyai J. Mat. Társulat, Budapest, North Holland, Amsterdam 1975,91~108.

Baranyai Z. , *Some applications of equalized matrices*, preprint, Univ. Eötvös, Budapest 1977.

Baranyai Z. , La coloration des arêtes des. hypergraphes complets Ⅱ, *Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes*. Coll. C. N. R. S. Orsay 1976, (Bermond, Fournier, Las Vergnas, Sotteau), C. N. R. S. , Paris 1978, 19~22.

Baranyai Z. , and A. E. Brouwer, Extensions of colourings of the edges of a complete uniform hypergraph, Math. Centre Report ZW91/77, Amsterdam 1977.

Berge C. , On the good $k$-colorings of a hypergraph, *Infinite and Finite Sets*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai Keszthely, I, 1973, North Holland, Amsterdam 1975, 159~163.

Berge C. , and F. Sterboul. Equipartite colorings in graphs and hypergraphs, *J. Comb. Theory* B, 22, 1977, 97~113.

Beck J. , On a combinatorial problem of Erdös and Lovász, *Discrete Math*. 17,1977,127,13.

Beck J. , On 3-chromatic hypergraphs, *Discrete Math*. 24,1978,127~137.

Beck J. , and T. Fiala, Integer making problems, *Discrete Math*. 3,1981,1~8

Bollobás B. , and A. J. Harris, List-colourings of graphs, *Graphs and Combinatorics* 1,1985,115~127.

Borsuk K. ,Drei Sätze über die $n$-dimensionale euklidische Sphäre, *Fund. Math*. 20,1933,177~190.

Brouwer A. E. ,A generalization of Baranyai's theorem, Math. Centre report ZW81/76, Amsterdam 1976.

Brouwer A. E. , and M. Voorhoeve, Turán theory and the lotto problem, *Packing and Covering*, (A. Schrijver, ed. ), Stichting Math. Centrum, Amsterdam 1978,89~94.

Brouwer A. E. , and A. Schrijver, Uniform hypergraphs, *Packing and Covering* (A. Schrijver, ed. ). Stichting Math. Centrum, Amsterdam 1978,35~67.

Chartrand G. , D. P. Geller, and S. Hedetniemi, A generalization of the chromatic number, *Proc. Cambridge Phil. Soc*. 64,1968,265~271.

Christofides N. ,An algorithm for the chromatic number of a graph, *The Computer J*. 14,1971,38~39.

Chung F. R. K. , On the Ramsey number $R(3,3,\cdots,3,2)$, *Discrete Math*. 5,1973,317~322.

Chvátal V. , Hypergraphs and Ramseyian theorems, *Proc. AMS* 27,1971,434~440.

de Caen, D. ,Turán's problem for hypergraphs, Ph. D. Thesis, University of Toronto 1982.

de Caen D. , Extensions of a theorem of Moon and Moser on complete subgraphs, *Ars Combinatoria* 16, 1983,5~10.

de Caen D. , A note on the probabilistic approach to Turán's problem, *J. Comb. Theory B*,34,1983,340~349.

Deming R. W. ,Acyclic orientation of a graph and chromatic and independent numbers, *J. Comb. Theory B*, 26,1979,101~110.

de Werra D. ,On line perfect graphs, *Math. Program*. 15.1978,236~238.

de Werra D. , Regular and canonical colorings, *Discrete Math*. 27. 1979, 309~316.

de Werra D. , On the use of alternating chains and hypergraphs in edge-coloring, *J. Graph Theory* 3, 1979, 175~182.

de Werra D. , On the existence of generalized, good, and equitable edge colorings, *J. Graph Theory* 5, 1981, 247~258.

de Werra D. , Obstructions for regular colorings, *J. Comb. Theory B*, 32, 1982, 316~326.

de Werra D. , On the use of bichromatic interchanges, *Annals Discrete Math*. 17, 1983, 639~646.

Erdös P. , On a combinatorial problem. *Nordisk. Mat. Tidskr*. 3, 1963, 5~10.

Erdös P. , On a combinatorial problem Ⅱ, *Acta Math. Ac. Sc. Hung*. 15, 1964, 445~447.

Erdös P. , A problem on independent r-tuples, *Ann. Univ. Sci. Budapest* 8, 1965, 93~95.

Erdös P. , On a combinatorial problem Ⅲ, *Canad. Math. Bull*. 12, 1969, 413~416.

Erdös P. , On some extremal problems on *r-graphs*, *Discrete Math*. 1, 1971, 1~6.

Erdös P. , and T. Gallai. On the maximal paths and circuits of graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hung*. 10, 1959, 337~357.

Erdös P. , and A. Hajnal, A property of families of sets, *Acta Math. Acad. Sci. Hung*. 12, 1961, 87~123.

Erdös P. , and A. Hajnal, On chromatic number of graphs and set-systems, *Acta Math. Acad. Sci. Hung* 17, 1966, 61~99.

Erdös P. , and L. Lovász, On 3-chromatic hypergraphs, *Infinite and Finite Sets*. Coll. Math. Soc. J. Bolyai 10, North Holland, 1975, 609~627.

Erdös P. , and J. L. Selfridge, On a combinatorial game, *J. Comb. Theory B*, 14, 1973, 298~301.

Erdös P. , and J. L. Spencer, *Probabilistic Methods in Combinatorics*, Academic Press, New York 1974.

Fournier J. C. , Méthode et théorème général de coloration des arêtes d'un multigraphe, *J. Math. Pures et Appl*. 56, 1977, 437~453.

Fournier J. C. Coloration des arêtes d'un graphe, *Cahiers du C. E. R. O*. 15, 1973, 311~314.

Frankl P. , On the chromatic number of the general Kneser graph, *J. Graph Theory* 9, 1985, 217~220.

Frankl P. , and V. Rödl, Lower bouds for Turán's problem, *Graphs and Combinatorics* 1, 1985, 213~216.

Gale D. . Neighbouring vertices on a convex polyhedron, *Linear inequalities and related systems*, (H. W. Kuhn, A. W. Tucker, eds), Annals of Math. Studies 38, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. 1956, 225~263.

Gerencsér L. , Szinezési Problémakról, *Mat. Lapok* 16, 1965, 274~277.

Graham R. L. , On edgewise 2-colored graphs with monochromatic triangles containing no complete hexagon, *J. Comb. Theory*, 4, 1968, 300~301.

Graham R. L. , B. Rothschild, and J. Spencer, *Ramsey Theory*, Wiley, New York 1980.

Hajnal A. , and B. Rothschild. A generalization of the Erdös-Ko-Rado theorem on finite set systems, *J. Comb. Theory A*, 15, 1973, 359~362.

Hales A. W. , and R. I. Jewett, Regularity and positional games, *Trans. AMS* 106, 1963, 222~229.

Hansen P. , Subdegrees and chromatic numbers of hypergraphs, *Annals of Discrete Math*. 1, 1977, 287~292.

Hansen P. , and M. Lorca, Deux conditions de colorabilité des hypergraphes, Coll. Math. Discrete, Bruxelles 1978, *Cahiers du C. E. R. O*. 20, 1978, 3~4, 405~410.

Harary F. . A survey of generalized Ramsey theory, *Graphs and Combinatorics*, Springer Verlag, Berlin 1974, 10~17.

Hedetniemi S. , Disconnected-colorings of graphs, *Combinatorial Structures*, Gordon and Breach, New York 1970, 163~167.

Herzog M. , and J. Schönheim, The $B_r$ property and chromatic numbers of generalized graphs, *J. Comb. Theo-*

*ry B*, 12, 1972, 41～49.

Hilton A. J. W., Colouring the edges of a multigraph so that each vertex has at most $j$ or at least $j$ edges of each colour on it, *J. London Math. Soc*. 2, 1975, 124～128.

Hilton A. J. W., and D. de Werra, Sufficient conditions for balanced and equitable edge colourings of graphs, *O. R. W. F*. 82/3, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1982.

Hilton A. J. W., and R. P. Jones, Partitioning the edges of a graph, *J. Comb. Theory B*, 25, 1978, 290～294.

Johnson D. S., On property $B_r$, *J. Comb. Theory B*. 20, 1976, 64～66.

Katona G. O. H., T. Nemets, and M. Simonovits, On a graph-problem of Turán, *Mat. Lapok* 15, 1964, 228～238 (in Hungarian).

Kleitman D. J., On a conjecture of Milner on $k$-graphs with non-disjoint edges, *J. Comb. Theory* 5, 1968, 153～156.

Kneser M., Aufgabe 360, Jber. Deutsch. Math.-Verein. 58, 1955/56, 2 Abt., 27.

Lehel J., Covers in hypergraphs, *Combinatorica* 2, 1982, 305～309.

Lorea M., On Turán hypergraphs, *Discrete Math*. 26, 1978, 281～285.

Lovász L., On minimax theorems of combinatorics, *Mat. Lapok* 26, 1975, 209～261.

Lovász L., *Combinatorial Problems and Exercises*, Akad. Kiadó, Budapest 1979.

Lovász L., On chromatic number of finite set-systems, *Acta Math. Ac. Sci. Hung*. 19, 1968, 59～67.

Lovász L., Graphs and set systems, *Beiträge zur Graphentheorie*, (H. Sachs, H. J. Voss, H. Walther, eds.), Teubner, 1968, 99～106.

Lovász L., Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy, *J. Comb. Theory* 25, 1978, 319～324.

McDiarmid C. J. H., The solution of timetabling problem, *J. Inst. Math. App*. 1972, 9, 23～24.

Meyer J. C., Quelques problèmes concernant les cliques des hypergraphes $h$-complets, *Hypergraph Seminar*, (Berge, Ray-Chaudhuri, eds.), Lecture Notes on Math. 411, Springer Verlag, New York 1974.

Meyer J. C., On the good colorings Ⅱ, *Infinite and Finite Sets*. Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Keszthely, 1973, Ⅲ, *North Holland, Amsterdam* 1975, 1099～1114.

Meyer J. C., Problèmes de coloration dans les hypergraphes, Thesis, University of Paris XI, June 1976.

Miller Z., and H. Müller, Chromatic numbers of hypergraphs and coverings of graphs, *J. Graph Theory*. 5, 1981, 297～305.

Motzkin T. S., Colorings, cocolorings and determinant terms, *Theory of Graphs*, Rome I. C. C. (P. Rosenstiehl, ed.), Dunod, Paris 1967, 253～254.

Müller H., Oriented hypergraphs, stability numbers and chromatic numbers, *Discrete Math*. 34, 1981, 319～320.

Nesetril J., and P. Hell, $k$-societies with given semi-group, *Combinatorial Structures and Their Applications*, Gordon and Breach, New York 1970, 301～392.

Sachs H., and M. Schäuble, Uber die Konstruktion von Graphen mit gewissen Färbungseigenschaften, *Beiträge Graphentheorie*, Teubner, Leipzig 1968, 131～135.

Sauer N., A generalization of a theorem of Turán, *J. Comb. Theory B*, 10, 1971, 109～112.

Schmidt W. M., Ein kombinatorisches Problem von Erdös und Hajnal, *Acta Math. Ac. Sc. Hung*. 15, 1964, 373～374.

Schönheim J., On covering, *Pacific J. Math*. 14, 1964, 1405～1411.

Seymour P. D., A note on a combinatorial problem of Erdös and Hajnal, *J. London Math. Soc*. 8, 1974, 373～374.

Sterboul F., An extremal problem in hypergraph coloring, *J. Comb. Theory B*, 22, 1977, 159～164.

Sterboul F., Un problème extrémal pour les graphes et les hypergraphes, *Discrete Math*. 11, 1975, 71～77.

Sterboul F., A new combinatorial parameter, *Infinite and Finite Sets*, Ⅲ, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 10 (Hajnal, Rado, Sós, eds.), North Holland, Amsterdam 1975, 1387～1404.

Sterboul F., *Some Extremal Coloring Problems: A Survey* (Aberdeen).

Sterboul F., and D. Wertheimer, Colorations extrêmes dans les hypergraphes, *Combinatorial Mathematics*, Annals of Discrete Math. 17, North Holland, Amsterdam 1983, 605～612.

# 第 5 章　二部图在超图中的推广

## 1　不含奇圈的超图

$H$ 是 $X$ 上的超图，$k(\geqslant 2)$ 是一个整数。一个长为 $k$ 的圈是指满足下列条件的序列$(x_1,E_1,x_2,E_2,x_3,\cdots,x_k,E_k,x_1)$：

(1) $E_1,E_2,\cdots,E_k$ 是 $H$ 中不同的边

(2) $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是 $H$ 中不同的顶点

(3) $x_i,x_{i+1}\in E_i \qquad (i=1,2,\cdots,k-1)$

(4) $x_k,x_1\in E_k$

易见序列$(x_1,E_1,x_1)$不是圈。长为奇数(偶数)的圈称为奇圈(偶圈)。

不含奇圈的图具有以下性质：

· Helly 性质；

· König 性质；

· 对偶 König 性质；

· 边着色性质；

· 顶点 2- 可着色。

对超图仍具有这些性质吗？

**例**　考虑 $p$ 行、$q$ 列的(0,1)- 矩阵$A$，以矩阵 $A$ 中值为 1 所对应的“位置”作为顶点，以每一行或列中所含的“位置”全体作为边的超图，记为 $H$。显然，$H$ 是 2-部图$G$的对偶($A$ 的行、列分别对应为 $G$ 的二部顶点)。因此 $H$ 不含奇圈，易证 $H$ 存在 2-(顶点)着色。

$$A=\overbrace{\begin{bmatrix}0&0&0&1^+&0&1^+&0&1^-\\0&1^+&0&1^-&0&0&1^+&0\\1^+&0&0&0&1^+&1^+&1&1^+\\1&0&0&1^+&1^+&0&1^+&0\\1^+&0&0&1^+&1^-&1^-&1^+&0\end{bmatrix}}^{q\text{列}}\left.\vphantom{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}}\right\}p\text{ 行}$$

**图 1　$H$ 的 2- 着色例子**

下面给出圈的更强的定义：圈$(x_1,E_1,x_2,E_2,\cdots,E_k,x_1)$称为 **B-** 圈，若满足下列性质：

(1) $k$ 是奇数

(2) $H' = (E_1, E_2, \cdots, E_k)$ 的最大度 $\Delta(H') = 2$

(3) $|E_i \cap E_{i+1}| = 1 \quad (i = 1,2,\cdots,k-1)$

(4) $|E_k \cap E_1| \geqslant 1$

**例** 射影平面 $P_7$ 和完全超图 $K_{2r-1}^r$ 不是2-可着色，而含长为3的 $B$-圈。

**定理1**(Fournier, Las Vergnas [1972],[1984]) 每个非2-可着色的超图均含 $B$-圈)。

**证** 设 $H$ 是非2-可着色的，不妨设 $H$ 是临界的，即 $\chi(H) > 2$，且对任一条边 $E$，均有 $\chi(H - E) = 2$。假设 $H$ 不含 $B$-圈。取 $E_0 \in H$，因为 $H - E_0$ 是2-可着色的，令 $(A, B)$ 是 $H - E_0$ 的2-着色。由于 $\chi(H) > 2$，故在 $H$ 中 $E_0$ 是单色边，不防设 $E_0 \subset A$。

考虑顶点 $z \in E_0$，令 $T_0 = \{z\}$ 及集合

$$\begin{cases} A_1 = A - T_0 \\ B_1 = B \cup T_0 \end{cases}$$

$(A_1, B_1)$ 是 $X$ 的一个新的二分划，用 $H_1$ 表示在这二分划下的单色边组成的簇，它满足

$(P_1)$ $H_1$ 与 $(E_0)$ 不相交；

$(P'_1)$ $H_1$ 的每条边含在 $B_1$ 中且与 $T_0$ 相交；

$(P''_1)$ 存在 $T_1 \in T_r H_1$ 满足 $T_1 \subset B \cap B_1$ 和 $T_1 \cap E_0 = \varnothing$。

一般地，若定义了二分划 $(A_{i-1}, B_{i-1})$ 及在这二分划下的单色边簇 $H_{i-1}$。令 $T_{i-1} \in T_r H_{i-1}$，且当 $i$ 为奇数时，$T_{i-1}$ 含在 $A \cap A_{i-1}$ 中，当 $i$ 为偶数时，$T_{i-1}$ 含在 $B \cap B_{i-1}$ 中。

对 $i \geqslant 1$ 为奇数时，令

$$\begin{cases} A_i = A_{i-1} - T_{i-1} \\ B_i = B_{i-1} \cup T_{i-1} \end{cases}$$

对 $i \geqslant 2$ 为偶数时，令

$$\begin{cases} A_i = A_{i-1} \cup T_{i-1} \\ B_i = B_{i-1} - T_{i-1} \end{cases}$$

对 $i$ 进行归纳，证明在二分划 $(A_i, B_i)$ 下的单色边簇 $H_i$ 满足下面三条性质：

$(P_i)$ $H_i$ 与 $H_0 = (E_0), H_1, H_2, \cdots, H_{i-1}$ 不相交；

$(P'_i)$ $H_i$ 中的边 $E$，当 $i$ 为偶数时，$E \subset A_i$，当 $i$ 为奇数时，$E \subset B_i$，且 $E \cap T_{i-1} \neq \varnothing$；

$(P''_i)$ 存在 $T_i \in T_r H_i$，当 $i$ 为偶数时，$T_i \subset A \cap A_i$，当 $i$ 为奇数时，$T_i \subset B \cap B_i$，且 $T_i$ 与 $E_0 - T_0, T_0, T_1, T_2, \cdots, T_{i-1}$ 不相交。

令 $k > 1$ 是一个整数。假设当 $i < k$ 时，性质 $P_i, P'_i, P''_i$ 成立。

1. 证明 $P_k$ 成立。

由 $P''_1, P''_2, \cdots, P''_{k-1}$，集合 $E_0 - T_0, T_0, \cdots, T_{k-1}$ 两两不相交，且在每一步中，将其集合整个改变颜色。因此，当 $i \leqslant k-1$，$i$ 为偶数时，$T_i \subset B_k$，$i$ 为奇数时，$T_i \subset A_k$。对 $i \leqslant k-1$，由 $T_i \in T_r H_i$ 和 $P'_i$，$H_i$ 的每条边 $E$ 分别与 $T_i$ 和 $T_{i-1}$ 相交。因为 $T_i$ 和 $T_{i-1}$ 分别属于 $A_k$ 和 $B_k$，故 $E$ 不是 $(A_k, B_k)$ 的单色边。因此单色边簇 $H_k$ 与 $H_0 = (E_0), H_1, \cdots, H_{k-1}$ 不相交。

2. 证明 $P'_k$ 成立。

由 $P_k$，在 $(A_{k-1}, B_{k-1})$ 中 $H_k$ 的每条边 $E$ 是 2 色的，而在 $(A_k, B_k)$ 中是单色的，因此，它必与 $T_{k-1}$ 相交。$T_{k-1}$ 在第 $k$ 步中才改变顶点的颜色。故当 $k$ 为奇数时，有 $E \subset B_k$；当 $k$ 为偶数时，有 $E \subset A_k$。

3. 证明 $P''_k$ 成立。

(a) 若 $k$ 是奇数，由 $P'_k$，$H_k$ 的每条边含在 $B_k$ 中，因此，存在 $T_k \in T_r H$ 且含在 $B_k$ 中。此外，由于含在 $T_0 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_{k-1}$ 中的边是 $(A, B)$ 的单色边，故 $H_k$ 中的边不含在 $T_0 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_{k-1}$ 中。因此可以假设 $T_k \subset B_k - (T_0 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_{k-1}) = B_k \cap B$。由于 $P''_1, P''_2, \cdots, P''_{k-1}, T_0, T_2, \cdots, T_{k-1}$ 均含在 $A$ 中，故它们与 $T_k$ 不交。又由 $(A_i, B_i)$ 的定义，集合 $E_0 - T_0, T_1, T_3, \cdots, T_{k-2}$ 含在 $A_k$ 中，所以与 $T_k$ 不相交。

(b) 若 $k$ 是偶数，它与(a)一样证明，除非是下面一种情况：$H_k$ 的边含在 $A_k$ 中且 $T_k \subset A \cap A_k$。另外，由于 $T_0, T_2, \cdots, T_{k-2}$ 含在 $B_k$ 中，而 $T_1, T_3, \cdots, T_{k-1}$ 含在 $B$ 中，所以 $T_k$ 与 $T_0, T_1, T_2, \cdots, T_{k-1}$ 不相交，剩下需证明 $T_k$ 与 $E_0 - T_0$ 不相交。

更进一步，下面将证明 $H_k$ 的每条边与 $E_0 - T_0$ 不相交。否则，若存在 $E_k \in H_k$ 满足 $E_k \cap (E_0 - T_0) \neq \emptyset$。令 $x_0 \in E_k \cap (E_0 - T_0)$。由 $P'_k$，存在 $x_k \in T_{k-1} \cap E_k$，再由横贯 $T_{k-1}$ 的极小性，存在 $E_{k-1} \in H_{k-1}$ 使得 $E_{k-1} \cap T_{k-1} = \{x_k\}$。由 $E_k \subset A_k$ 和 $E_{k-1} \subset B_k \cup T_{k-1}$，则又有 $E_{k-1} \cap E_k = \{x_k\}$。逐次对 $E_{k-1}$ 等重复这一过程，可得序列

$$E_0 - T_0, x_0, E_k, x_k, E_{k-1}, x_{k-1}, \cdots, E_1, x_1 = z$$

使得对 $i = 1, 2, \cdots, k$，有

(1) $E_i \in H_i, x_i \in T_{i-1}, E_i \cap E_{i-1} = \{x_i\}$

则序列 $(x_0, E_0, x_1, E_1, x_2, \cdots, x_k, E_k, x_0)$ 是一个长为 $k+1$ 的奇圈，并且对每个 $i \geqslant 1$，有 $|E_i \cap E_{i-1}| = 1$。

故由反证法的假设，超图 $H' = (E_0, E_1, \cdots, E_k)$ 存在一个顶点 $y$，它的度大于 2。不妨设

$$y \in E_p \cap E_q \cap E_r \qquad (0 \leqslant p < q < r \leqslant k, \text{且 } r - p \text{ 达到最小})$$

首先证明 $y \neq x_{p+1}, x_{p+2}, \cdots, x_r$。事实上，若 $r$ 为偶数，则由 $P_r', E_r \subset A_r$。由(1)和 $P_1'', P_2'', \cdots, P_{r-1}''$，有 $x_1, x_3, \cdots, x_{r-1}$ 含在 $B_r$ 中，故 $y$ 异于$x_1, x_3, \cdots, x_{r-1}$。若 $y = x_s$，$s$ 为偶数，且 $p+1 \leqslant s < r$，则由 $r-p$ 的最小性，圈$(x_s, E_s, x_{s+1}, \cdots, x_r, E_r, x_s)$ 是最大度为 2 的奇圈，故它为 $B$- 圈，这与反证法的假设矛盾。若 $y = x_r$，则由(1)及 $r-p$ 的最小性有$r = q+1$，因此 $q$ 为奇数。另一方面，若 $p$ 为偶数，则 $E_p \subset A_p$ 且不含属于$B_p$ 的$x_r$，这与 $y \in E_p \cap E_q \cap E_r$ 相矛盾。于是 $p$ 为奇数，故圈$(x_r, E_p, x_{p+1}, E_{p+1}, \cdots, x_q, E_q, x_r)$ 是一个 $B$- 圈，矛盾。

显然，$p$ 与 $q$ 有不同的奇偶性。否则，$(y, E_p, x_{p+1}, E_{p+1}, \cdots, x_q, E_q, y)$ 是 $B$- 圈，矛盾。类似地，$q$ 和$r$ 也有不同的奇偶性。不妨设 $p$ 为偶数，$q$ 为奇数，$r$ 为偶数，则 $E_p \subset A_p, E_q \subset B_q, E_r \subset A_r$。由于 $E_q \cap B \subset B_q$，我们有 $E_q \cap E_p \subset A$。类似地，$E_q \cap E_r \subset B$。因此有 $E_p \cap E_q \cap E_r = \varnothing$，矛盾。

因此 $T_k$ 与$E_0 - T_0$ 不相交。由此证明了性质 $P_k, P'_k, P''_k$ 对一切$k$ 成立。

现在已定义了一系列关于超图 $H$ 的二分划$(A_1, B_1), (A_2, B_2), \cdots$，及各自对应的单色边簇超图 $H_1, H_2, \cdots$，且这些超图两两不交。由于 $H$ 的边数有限，故存在 $k$，使 $H_k = \varnothing$。也就是说，$(A_k, B_k)$ 是 $H$ 的2- 着色，这与 $\chi(H) > 2$ 相矛盾。

**推论 1** 超图 $H$ 的秩小于等于3但不是2- 可着色的，则存在一个 $B$- 圈，使得圈中非相邻的边不相交。

**证** 设超图 $H$ 满足$\chi(H) \geqslant 3, r(H) \leqslant 3$。假设 $H$ 为如下极超图，对 $H$ 中任意的边 $E$，有 $\chi(H-E) = 2$。由定理 1 可知，存在一个 $B$- 圈$(x_1, E_1, x_2, E_2, \cdots, E_k, x_1)$，不妨设长度 $k$ 是最小的。若对某一整数 $j$ $(3 \leqslant j \leqslant k-1)$，有 $E_1 \cap E_j \neq \varnothing$。设 $y \in E_1 \cap E_j$。由于 $B$- 圈的最大度数为 2，故 $y$ 异于顶点$x_1, x_2, \cdots, x_k$。又 $r(H) \leqslant 3$，故有 $E_1 = \{y, x_1, x_2\}$和 $E_j = \{y, x_j, x_{j+1}\}$。于是下面两个圈$(y, E_1, x_2, \cdots, E_j, y)$ 和$(x_1, E_1, y, E_j, x_{j+1}, \cdots, E_k, x_1)$ 之一是奇圈，由于 $E_1 \cap E_j = \{y\}$，故这奇圈是 $B$- 圈，这与 $k$ 的最小性相矛盾。

**推论 2** 超图$H$不是2- 可着色，则存在一个最大度为2的奇圈，且圈上每对非相邻的边是不相交的。

在推论 1 的证明中，只需用“最大度为2的奇圈”去替换“$B$- 圈”，即可证明这一结论。

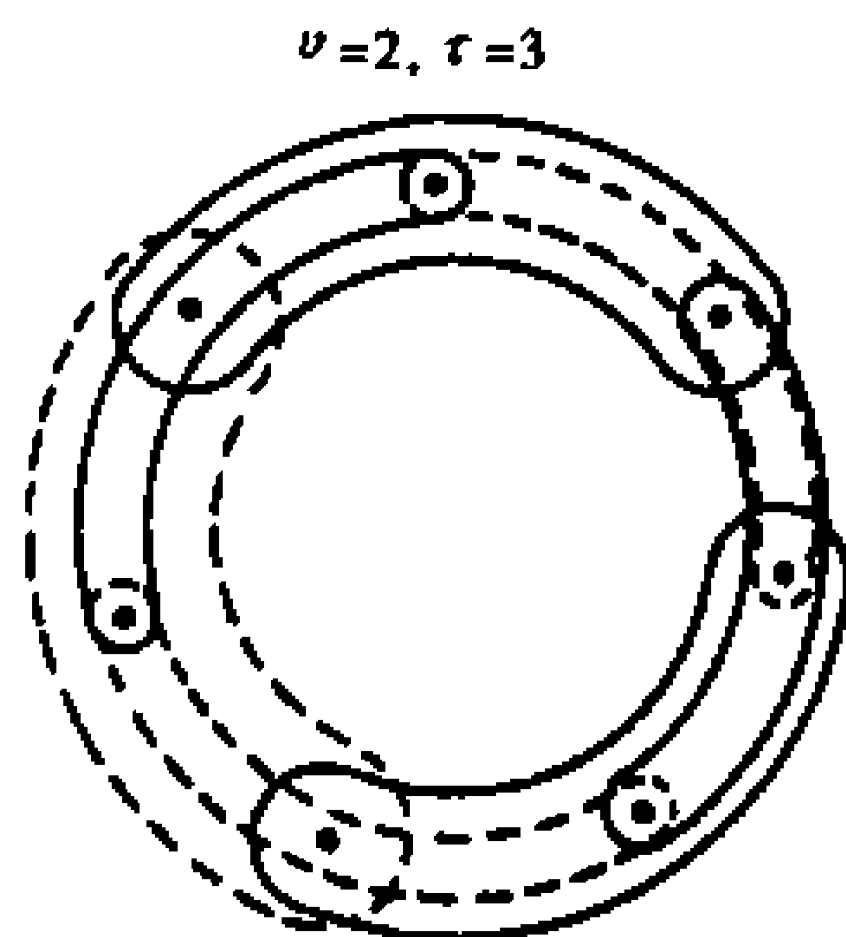
从这些结果我们可期望 2- 部图所具有的某些性质，在不含最大度为 2 的奇圈的超图中也是具有的。但这样的超图可能具有 Helly 性质，也可能不具有，见图 2 和图 3。

从下面的一些结果，可获得有关无奇圈超图的特征。

**定理 2** 超图 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 不含奇圈当且仅当每个超图 $H' = (E'_1, E'_2, \cdots, E'_m)$，其中 $E'_i \subset E_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 是 2- 可着色的。

**证** 若 $H$ 不含奇圈，由定理 1 有，$\chi(H) \leqslant 2$。超图 $H'$ 也不含奇圈，所以 $\chi(H') \leqslant 2$。

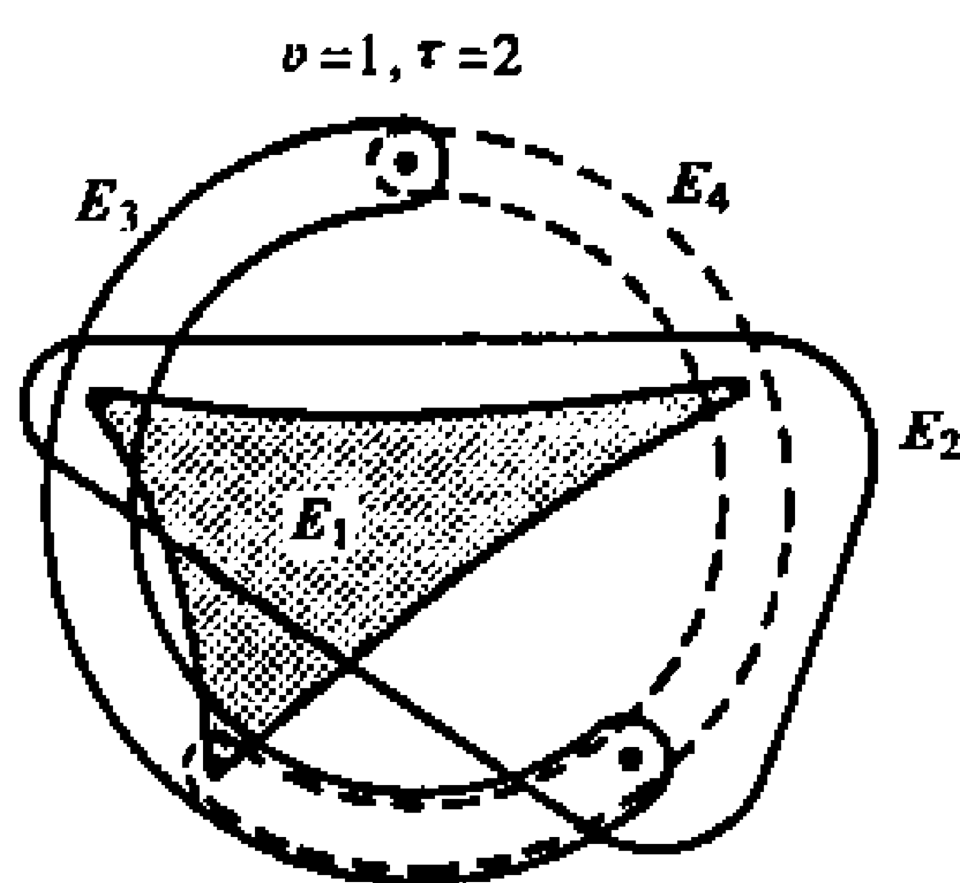
如果 $H$ 含奇圈 $(x_1, E_1, x_2, E_2, \cdots, E_k, x_1)$，则由边 $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \cdots, [x_k, x_1]$ 所导出的超图 $H'$ 就有 $\chi(H') \geqslant 3$，矛盾。




不含最大度为 2 的奇圈的超图

（具有 Helly 性质）

图 2




不含最大度为 2 的奇圈的超图

（不具有 Helly 性质）

图 3

Commoner [1973] 用矩阵的观点研究了无奇圈的这类超图。Yannakakis [1985] 给出了一个多项式的算法，用来判别一个超图是否不含奇圈。

**定理 3** 超图 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 是无圈的充要条件是：对 $\{1,2,\cdots,m\}$ 中的每个非空子集 $J$，有

(1) $\left|\bigcup_{j\in J} E_j\right| > \sum_{j\in J}(|E_j| - 1)$

**证** 1. 若 $H$ 含圈 $(a_1, E_1, a_2, E_2, \cdots, E_k, a_1)$，令 $K = \{1,2,\cdots,k\}$，则有

$$\left|\bigcup_{j\in K} E_j\right| = \left|\bigcup_{j\in K}(E_j - \{a_j\})\right| \leqslant \sum_{j\in K}|E_j - \{a_j\}| = \sum_{j\in K}(|E_j| - 1)$$

这与(1)矛盾。

2. 若 $H$ 不含圈，则部分超图 $H' = (E_j | j \in J)$ 也不含圈。令 $\bigcup_{j\in J} E_j = \{x_i | i \in I\}$，构造顶点集为 $I \cup J$ 的 2-部图 $G$。$i \in I$ 和 $j \in J$ 相邻当且仅当 $x_i \in E_j$。

由于 $G$ 不含圈，有 $m(G) < n(G)$（见 Graphs，第 2 章）。于是，

$$\sum_{j\in J}|E_j| = m(G) < n(G) = \left|\bigcup_{j\in J} E_j\right| + |J|$$

因此(1)式成立。

**注** 如果 $H$ 是 $k$-一致的，则 $H$ 无圈的充要条件是：对 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的每个非空子集 $J$，有

$$\left|\bigcup_{j\in J} E_j\right| > (k-1)|J|$$

这一结果可推广为下面形式：

**推广**(Las Vergnas [1970]) $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是一个超图，$k\geqslant 2$ 是整数，则存在无圈 $k$- 一致超图 $H'=(E'_1,E'_2,\cdots,E'_m)$，且有 $E'_i\subset E_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 的充要条件是：对每个非空子集 $J\subset\{1,2,\cdots,m\}$，有

$$\left|\bigcup_{j\in J}E_j\right|>(k-1)|J|$$

在无圈超图类和无 $B$- 圈超图类之间还存在许多超图类，各自都有有理论意义的特性且涉及一些组合应用。在本章，将讨论图 4 所示的各类超图。

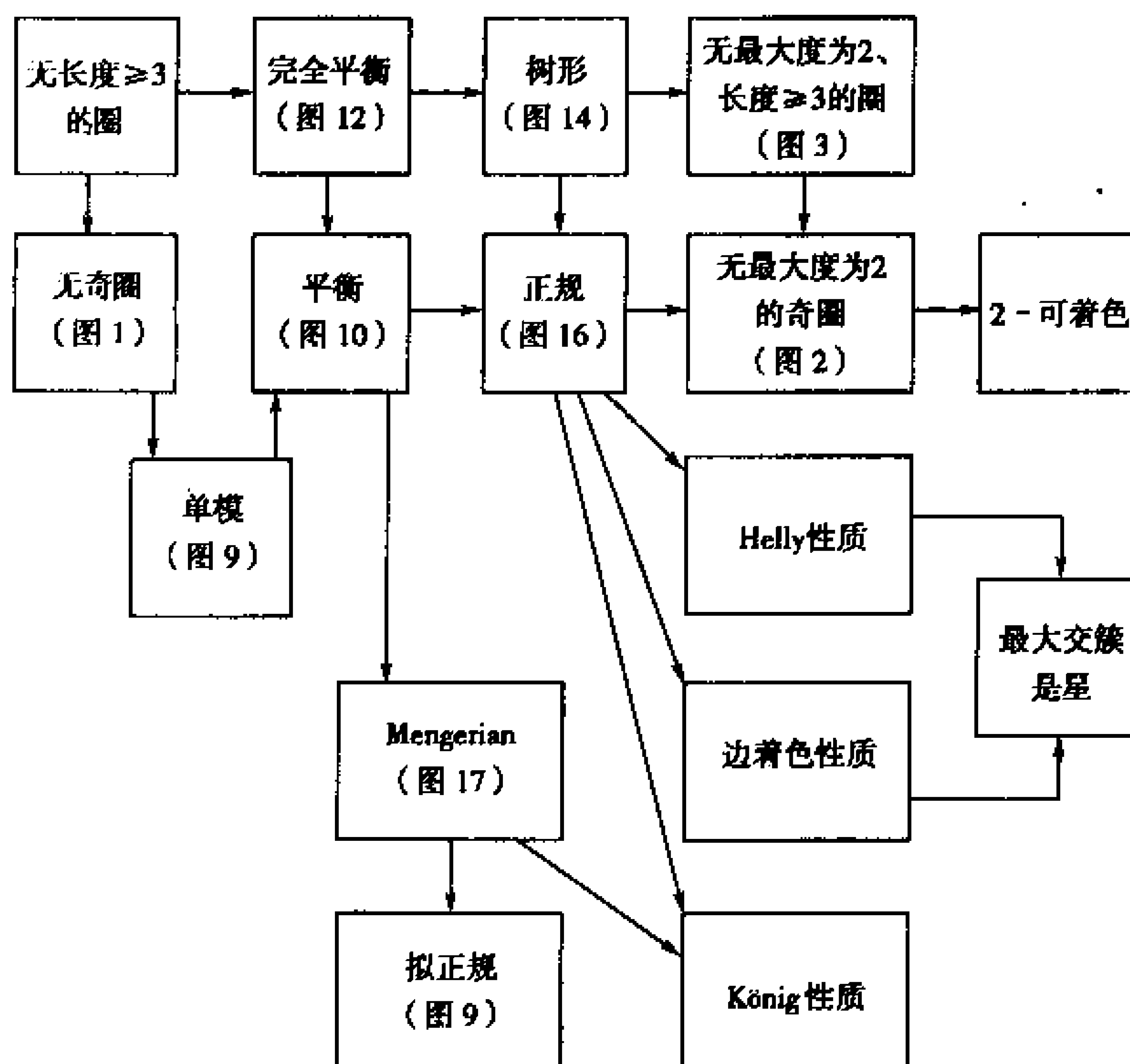



图 4 树和 2- 部图在超图中的推广的主要超图类间的关系图

## 2 单模超图

矩阵 $A=(a_{ij})$ 称为是**全单模**的，如果 $A$ 的每个子方阵的行列式值为 0，+1 或 −1。一个超图称为是**单模**的，如果它的关联矩阵是全单模的。

从定义立即可得：单模超图的对偶超图、子超图和部分超图都是单模的。

单模超图的一个组合性质揭示了“均匀着色”的概念。

**定理 4** $X$ 上的超图 $H$ 是单模的充要条件是：对每个 $S\subset X$，子超图 $H_S$ 有一个均匀 2- 着色。也就是存在 $S$ 的二分划 $(S_1,S_2)$，使对 $H_S$ 的每条边 $E$ 满足

$$\left[\frac{|E|}{2}\right] \leqslant |E \cap S_i| \leqslant \left\{\frac{|E|}{2}\right\} \qquad (i = 1,2)$$

**证**　若 $n \times m$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 是全单模的。由于 $A$ 中每一个元素的值是 $A$ 的一阶子矩阵的行列式值，故 $a_{ij} = 0, +1$ 或 $-1$。此外，Ghouila-Houri [1962] 证明了：$A$ 是全单模的充要条件是：对 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的每个非空子集 $I$，$I$ 可分划为两个不相交的子集 $I_1$ 和 $I_2$，使得

$$\left|\sum_{i\in I_1} a_{ij} - \sum_{i\in I_2} a_{ij}\right| \leqslant 1 \qquad (1 \leqslant j \leqslant m)$$

若 $A$ 是一个超图的关联矩阵，则 $S_1 = \{x_i \mid i \in I_1\}$ 和 $S_2 = \{x_i \mid i \in I_2\}$ 是 $H$ 的一个均匀 2- 着色。

**例 1**　多重 2- 部图。$G$ 是一个多重 2- 部图，则 $G$ 的任一个子图也是多重2- 部图，因此是 2- 可着色。所以 $G$ 是单模的。

**例 2**　区间超图。$H$ 定义为顶点集在一条线上的区间簇，则对每个 $A \subset X$，子超图 $H_A$ 仍是区间超图。在 $H_A$ 中，从左到右用红、蓝两色连续交替地给顶点着色，可得 $H_A$ 的均匀 2- 着色。因此 $H$ 是单模的。

**例 3**　定向树中的路的超图。设 $T$ 是以 $X$ 为顶点的集合，它的每条边有唯一的一个定向的树。令 $H$ 是以 $X$ 为顶点集，以 $T$ 中的有向路为边的超图。则如图 5 中那样对 $T$ 进行 2- 着色就给出了 $H$ 的一个均匀 2- 着色。若在 $H$ 中除去顶点 $a$，考虑如图 6 中那样的树 $T'$，对 $T'$ 的每个 2- 着色导出 $H_{X-\{a\}}$ 的一个均匀 2- 着色。故 $H$ 的每个子超图也是均匀 2- 着色的。

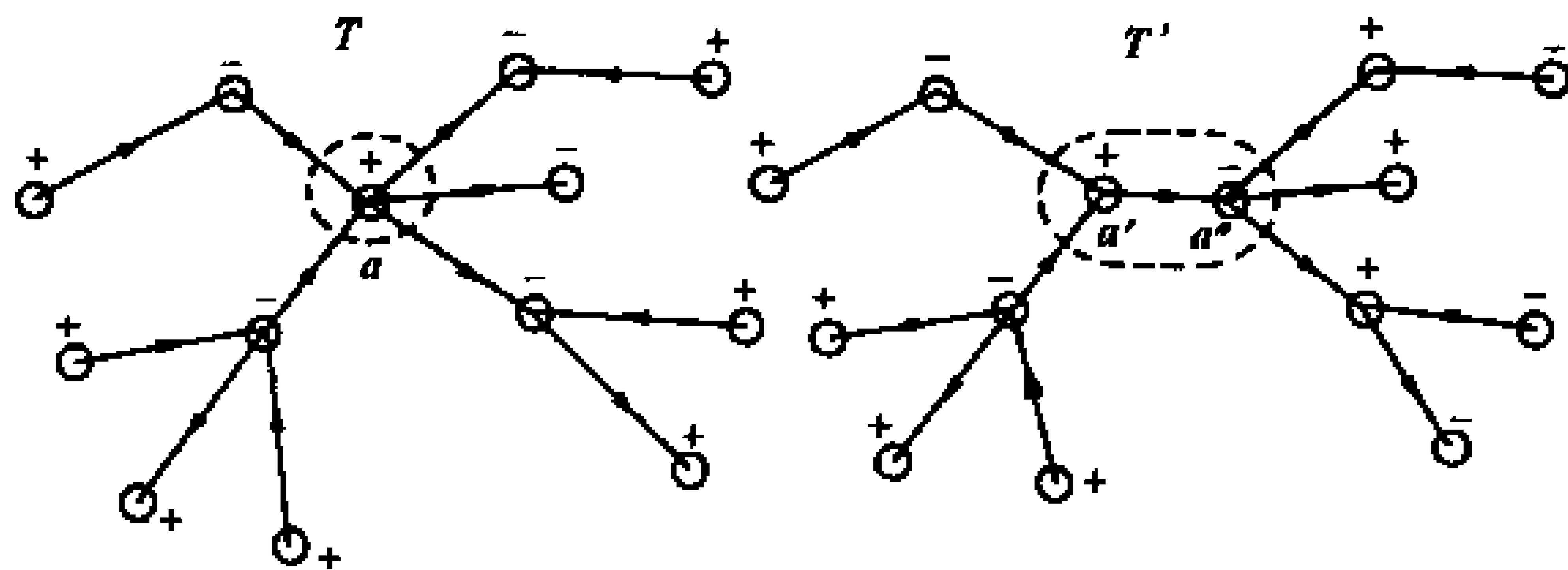



图 5　　　　图 6

**例 4**　树的弧上的超图。设 $T_0$ 是以 $X$ 为顶点的集合，它的每条边有唯一定向的树。用 $U$ 表示 $T_0$ 的弧集。令 $H_0$ 是以 $U$ 为顶点集，以 $T_0$ 的有向路的弧集为边的超图，可以用两种颜色 + 和 − 给 $T_0$ 的弧着色，使有向路上相邻弧的颜色相异（见图 7）。于是给出了 $H_0$ 的一个均匀 2- 着色。若除去 $U$ 的一条弧 $u$，考虑树 $T'_0$（见图 8），$T'_0$ 的 2- 着色就导出了 $H_{U-\{u\}}$ 的一个均匀 2- 着色。

**定理 5**　每个无奇圈的超图是单模的。

**证**　由于无奇圈超图的子超图不含奇圈，因此只需证明无奇圈超图是均匀2-

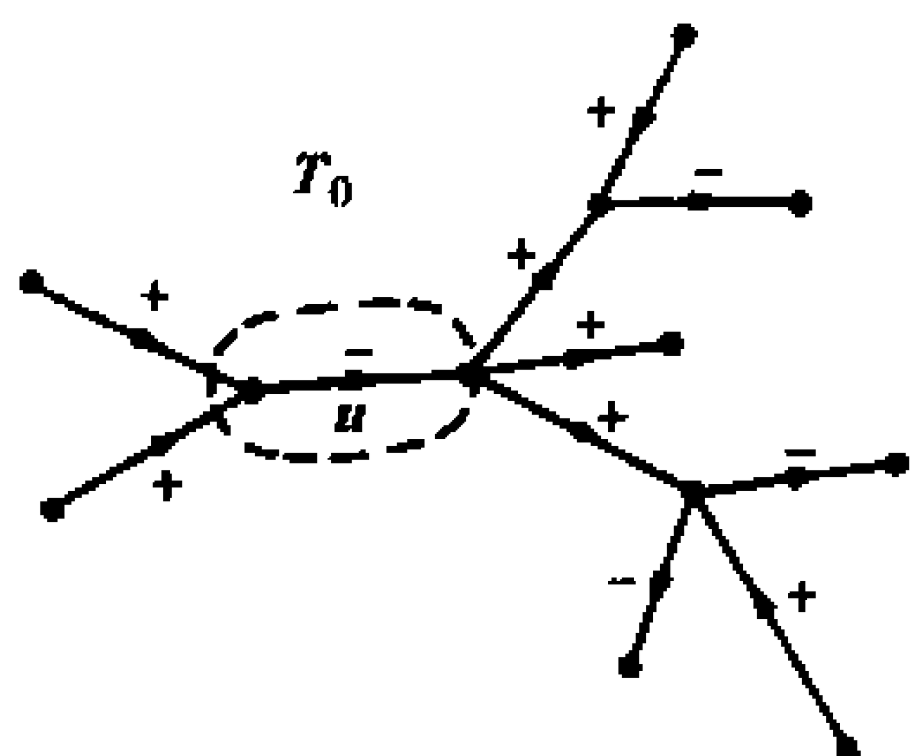



图7

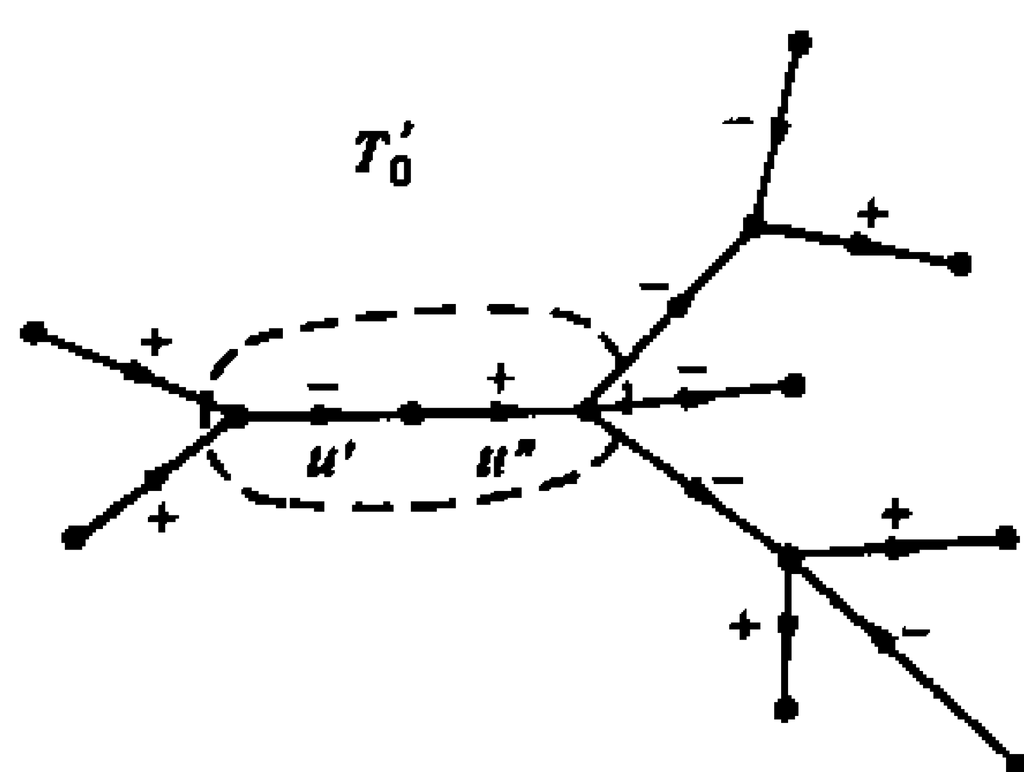



图8

着色的即可。

对每个 $i \leqslant m$，令 $r_i = |E_i|$。定义一个映射

$$y_i : \{1,2,\cdots,r_i\} \to X$$

使 $E_i = \{y_i(1), y_i(2), \cdots, y_i(r_i)\}$。考虑

$$\mathscr{F}_i = \left\{ y_i(1)y_i(2), y_i(3)y_i(4), \cdots, y_i\left(2\left[\frac{r_i}{2}\right]-1\right)y_i\left(2\left[\frac{r_i}{2}\right]\right) \right\}$$

这些 $\mathscr{F}_i$ 的并构成图 $G$。并假设所选取的 $y_i$（相应地对于 $\mathscr{F}_i$）使 $G$ 中的最小奇圈的长度尽可能地小。若 $G$ 有奇圈，考虑 $G$ 的一个最小奇圈 $\mu = [a_1, a_2, \cdots, a_1]$。下面证明 $\mu$ 中没有两条边取自同一个 $\mathscr{F}_i$。事实上，若有 $[a_s, a_{s+1}] \in \mathscr{F}_i$ 和 $[a_t, a_{t+1}] \in \mathscr{F}_i$，在 $\mathscr{F}_i$ 中用 $[a_s, a_{s+1}]$ 和 $[a_t, a_{t+1}]$ 代替原来两条边，得到图 $G'$，$G'$ 中有一个比 $\mu$ 更小的奇圈 $[a_1, a_2, \cdots, a_s, a_{t+1}, \cdots, a_1]$ 或 $[a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_t, a_{s+1}]$。这与 $G$ 的定义矛盾。然而若 $\mu$ 的边分别在不同的 $\mathscr{F}_i$ 中，则由 $\mu$ 可诱导出 $H$ 的一个奇圈，这又与超图 $H$ 无奇圈相矛盾。故这样的奇圈 $\mu$ 是不存在的。

由于图 $G$ 无奇圈，存在2-着色 $(S_1, S_2)$，这个2-着色就是 $H$ 的一个均匀2-着色。

**定理 6**(de Werra [1971]) 对每个 $k \geqslant 2$，单模超图 $H$ 存在均匀 $k$-着色。

**证** 当 $k = 2$ 时，由定理4，结论成立。对 $k > 2$，把 $H$ 的顶点分划为 $k$ 个类 $(S_1, S_2, \cdots, S_k)$。对 $i, j \leqslant k$ 和 $E \in H$，令

$$\varepsilon_{ij}(E) = |S_i \cap E| - |S_j \cap E|$$

$$\varepsilon(E) = \max_{i,j} \varepsilon_{ij}(E)$$

显然 $\varepsilon(E) \geqslant 0$。若对每条边 $E \in H$，均有 $\varepsilon(E) \leqslant 1$，则 $(S_1, S_2 \cdots, S_k)$ 是 $H$ 的一个均匀 $k$-着色，反之亦真。现设存在 $E_0 \in H$ 使 $\varepsilon(E_0) \geqslant 2$，并设 $p, q \leqslant k$ 有

$$\varepsilon_{pq}(E_0) = \varepsilon(E_0)$$

则

(1) $|S_q \cap E_0| \leqslant |S_i \cap E_0| \leqslant |S_p \cap E_0| \qquad (i \neq p, q)$

由集合 $S_p \cup S_q$ 导出的子超图 $H'$ 有一均匀2-着色 $(S'_p, S'_q)$。令 $S'_i = S_i$ $(i \neq$

$p,q$)，则新的 $k$- 分划$(S'_1,S'_2,\cdots,S'_k)$所对应的系数 $\varepsilon'_{ij}$ 满足：对每个 $E\in H$，$\varepsilon'_{pq}(E)\leqslant 1$。此外，对 $i$ 和 $j\neq p,q$，

$$\varepsilon'_{ij}(E)=\varepsilon_{ij}(E)$$

而当 $i\neq p,q$ 时，由(1)不可能有 $\varepsilon'_{ip}(E)=\varepsilon(E_0)$，除非 $\varepsilon_{ip}(E)=\varepsilon(E_0)$ 或 $\varepsilon_{iq}(E)=\varepsilon(E_0)$。

现考察满足 $\varepsilon_{rs}(E)=\varepsilon(E_0)$ 的三元组$(r,s,E)$的数目，每进行一次至少减少1。经过有限次的这种变换，最后总可得到一个 $k$- 分划，使得每条边 $E\in H$，有 $\varepsilon'(H)\leqslant 1$。这个 $k$- 分划就是 $H$ 的一个均匀 $k$- 着色。

**推论 1**　设 $H$ 是一个单模超图，$k=s(H)$，则存在 $X$ 的一个 $k$- 分划$(T_1,T_2,\cdots,T_k)$，它的每个 $T_i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ 是 $H$ 的横贯集，且满足对每条边 $E$ 有

$$(1)\ \left[\frac{1}{k}|E|\right]\leqslant|E\cap T_i|\leqslant\left\{\frac{1}{k}|E|\right\}\qquad(i=1,2,\cdots,k)$$

事实上，$H$ 具有满足(1)式的均匀 $k$- 着色$(T_1,T_2,\cdots,T_k)$。又 $k=s(H)$，故 $T_i$ 是 $H$ 的横贯。

**推论 2**　设 $H$ 是一个单模超图，$k\geqslant 1$，则 $H$ 可分解为 $H=H_1+H_2+\cdots+H_k$，使得对 $H$ 的每个顶点 $x$，满足

$$\left[\frac{1}{k}d_H(x)\right]\leqslant d_{H_i}(x)\leqslant\left\{\frac{1}{k}d_H(x)\right\}\qquad(i=1,2,\cdots,k)$$

事实上，$H$ 的对偶超图 $H^*$ 也是单模的，将定理6应用于 $H^*$ 即可。

**推论 3**　每个单模超图具有边着色性质。

事实上，在推论2中取 $k=\Delta(G)$ 即可。

由下面的结果引起人们对全单模矩阵的关注。

**定理 7**(Hoffman, Kruskal [1956])　$A$ 是一个 $n\times m$ 矩阵，下述各命题相互等价：

(ⅰ) $A$ 是全单模的；

(ⅱ) 对每个 $c\in\mathbf{Z}^n$，$c$- 匹配多面体：

$$Q(c)=\{y\mid y\in\mathbf{R}^m,y\geqslant 0,Ay\leqslant c\}$$

只有整极值点；

(ⅲ) 对每个 $b,c\in\mathbf{Z}^n$ 及 $p,q\in\mathbf{Z}^m$，

$$Q(b,c,p,q)=\{y\mid y\in\mathbf{R}^m,b\leqslant Ay\leqslant c;p\leqslant y\leqslant q\}$$

是空集或含有整极值点。

**证**　(ⅰ)⇒(ⅱ)。首先，多面体 $Q(c)$ 的极值点是形为 $\langle a^i,y\rangle=c_i$ 的平面的交点。由于 $a_{ij}$，$c_i$ 均为整数，及 $A$ 是全单模矩阵，故由 Cramer 的法则知，点 $y$ 的坐标均为整数值。

(ⅱ)⇒(ⅰ)。设 $B$ 是矩阵$(A,I_n)$中的一个 $n$ 阶满秩子矩阵。

$$(A, I_n) = \begin{bmatrix} A & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

令 $y \in \mathbf{Z}^n$ 且使 $y + B^{-1}u^i \geqslant 0$,这里 $u^i$ 是 $\mathbf{Z}^n$ 中第 $i$ 个坐标为 1 其余坐标为 0 的单位矢量,则矢量 $z = y + B^{-1}u^i$ 满足 $Bz = By + u^i \in \mathbf{Z}^n$。因而 $z$ 确定 $Q(c)$ 的极值点的非零分量,这里 $c = By + u^i$。于是由(ⅱ)有 $z \in \mathbf{Z}^n$。故 $B^{-1}u^i = z - y \in \mathbf{Z}^n (i = 1, 2, \cdots, n)$,因此 $B^{-1}$ 的元素均为整数。所以 $\det B$ 和 $\det B^{-1}$ 均为整数,又因 $\det B \cdot \det B^{-1} = \det I_n = 1$,所以 $\det B = \pm 1$。这就证明了 $A$ 是全单模的(上述简单证明由 Viennot 和 Dantzig [1968] 给出)。

(ⅱ) ⇔(ⅲ)。$A$ 是全单模的等价于下面矩阵

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A \\ -A \\ I_m \\ -I_m \end{bmatrix}$$

是全单模的。取

$$\bar{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n, -b_1, -b_2, \cdots, -b_n, q_1, q_2, \cdots, q_m, -p_1, -p_2, \cdots, -p_m)$$

对 $\bar{A}$ 及 $\bar{c}$ 应用(ⅱ)可得(ⅲ)。

上述结果蕴含了用禁用结构来刻画单模矩阵的特征。例如,前面指出的 Ghouila-Houri [1962] 的结果或 Camion [1965] 的结果等。读者可参看 Padberg [1988] 的综述。

考虑超图 $H$ 及其关联矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times m}$(没有零行、零列)。令 $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n) \in \mathbf{N}^n$。一个 $c$- 匹配是多面体

$$Q(c) = \{y \mid y \in \mathbf{R}^m, y \geqslant 0, Ay \leqslant c\}$$

中的一个整矢量 $y$。对 $c = 1$,$Q(c)$ 中整点的坐标只能取 0 或 1,故 1- 匹配就是通常的一个匹配。若赋予每条边 $E_j$ 一个整数 $d_j \geqslant 0$,并称 $d_j$ 为边 $E_j$ 的权,则 $\sum_{j=1}^{m} d_j y_j$ 称为 $c$- 匹配 $y$ 的权和。我们考虑使权和达到最大的 $c$- 匹配,记为

$$N_{\substack{\max \\ y \in Q(c)}} \langle d, y \rangle = \max\{\langle d, y \rangle \mid y \in Q(c) \cap \mathbf{N}^m\}$$

特别地,当 $c = 1, d = 1$ 时,有 $N_{\cdot\max}\langle d, y \rangle = \nu(H)$。

对于矢量 $d \in \mathbf{N}^m$,令多面体

$$P(d) = \{t \mid t \in \mathbf{R}^n, t \geqslant 0, A^{\mathrm{T}} t \geqslant d\}$$

中整矢量 $t = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 称为 $H$ 的 **$d$- 横贯**。对超图 $H$ 的每个顶点 $x_i$ 赋予一个整费用:$c_i \geqslant 0$。我们需要考虑使费用 $\sum_{i=1}^{n} c_i t_i$ 达到最小的 $d$- 横贯,记为

$$N_{\substack{\min \\ t \in P(d)}} \langle c, t \rangle = \min\{\langle c, t \rangle \mid t \in P(d) \cap \mathbf{N}^n\}$$

特别地，$N_{\substack{\min \\ A^{T}t\geq 1}}\langle \mathbf{1},t\rangle = \tau(H)$。

应用定理7，可获得以下结论：

**推论1** $H$ 是 $n$ 个顶点、$m$ 条边的单模超图，则对 $c\in \mathbf{N}^{n}$ 和 $d\in \mathbf{N}^{m}$，有

$$N_{\substack{\max \\ y\in Q(c)}}\langle d,y\rangle = N_{\substack{\min \\ t\in P(d)}}\langle c,t\rangle$$

**证** 若 $H$ 是单模的，对 $y\in Q(c)$，$\langle d,y\rangle$ 在整点 $y_0$ 处达到最大；而对 $t\in P(d)$，$\langle c,t\rangle$ 在整点 $t_0$ 处达到最小。根据线性规划的对偶定理，有

$$\langle d,y_0\rangle = \langle c,t_0\rangle$$

这就是推论1的等式。

**推论2** $H$ 是秩为 $r$ 的单模超图，则 $H$ 有 $r$-强着色。

**证** 设 $A=(a_{ij})$ 是 $H$ 的关联矩阵，其行对应顶点，列对应边。令 $n$ 维的(0,1)-矢量 $z$ 是集合 $S\subset X$ 的特征矢量，则 $|S\cap E_j| = \langle z,a_j\rangle$。

存在子集 $S$ 满足对每条边 $E_j$ 有 $|S\cap E_j|\leqslant 1$，而当 $|E_j| = r$ 时有 $|S\cap E_j| = 1$ 的充要条件是：下面不等式组

$$0\leqslant z\leqslant 1$$
$$0\leqslant \langle z,a_j\rangle\leqslant 1 \quad (若 E_j\in H)$$
$$\langle z,a_j\rangle = 1 \quad (若 E_j\in H，且|E_j| = r)$$

有整解。由于矢量 $z=(\frac{1}{r},\frac{1}{r},\cdots,\frac{1}{r})$ 满足所有不等式，故存在整数解 $z_0$，它为着1色的顶点集合 $S$ 的特征矢量。对秩为 $r-1$ 的单模超图 $H_{X-S}$ 重复这一过程，定义出着2色的集合 $S'$。继续这一过程。当得到一个秩为1的超图时，我们就给出了 $r$-强着色 $(S,S',\cdots)$。

**注** 检验一个矩阵是否为全单模的多项式算法和它的扩展算法是分别由 Seymour [1980] 和 Bixby, Truemper, Tamir 等给出的。事实上，检验一个矩阵 $A$ 是否为全单模的等价于检验相关联的拟阵 $M(A)$ 是否为正则的（扩展算法可参见 Bixby[1982]）。在单模超图某些特殊类中寻找最大匹配有一个好算法，参看 Conforti, Cornuéjols [1987]。

## 3 平衡超图

若超图 $H$ 的每一个奇圈中存在一条边含该圈上的三个顶点，则 $H$ 称为是平衡的。若超图 $H$ 的每个长度至少是3的圈中存在一条边含该圈上三个顶点，则称 $H$ 为完全平衡的。

换句话说，$H$ 是平衡的充要条件是：$H$ 的关联矩阵 $A$ 中不含形如 $B_k$ 的子矩阵，其中 $k(\geqslant 3)$ 是奇数。

$$B_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

类似地，$H$ 是完全平衡超图当且仅当 $A$ 不含形如 $B_k(k \geqslant 3)$ 的子矩阵。

一个完全平衡超图必定是平衡的。通过考察每个圈，易证图 9 和图 10 所示的超图都是平衡的。

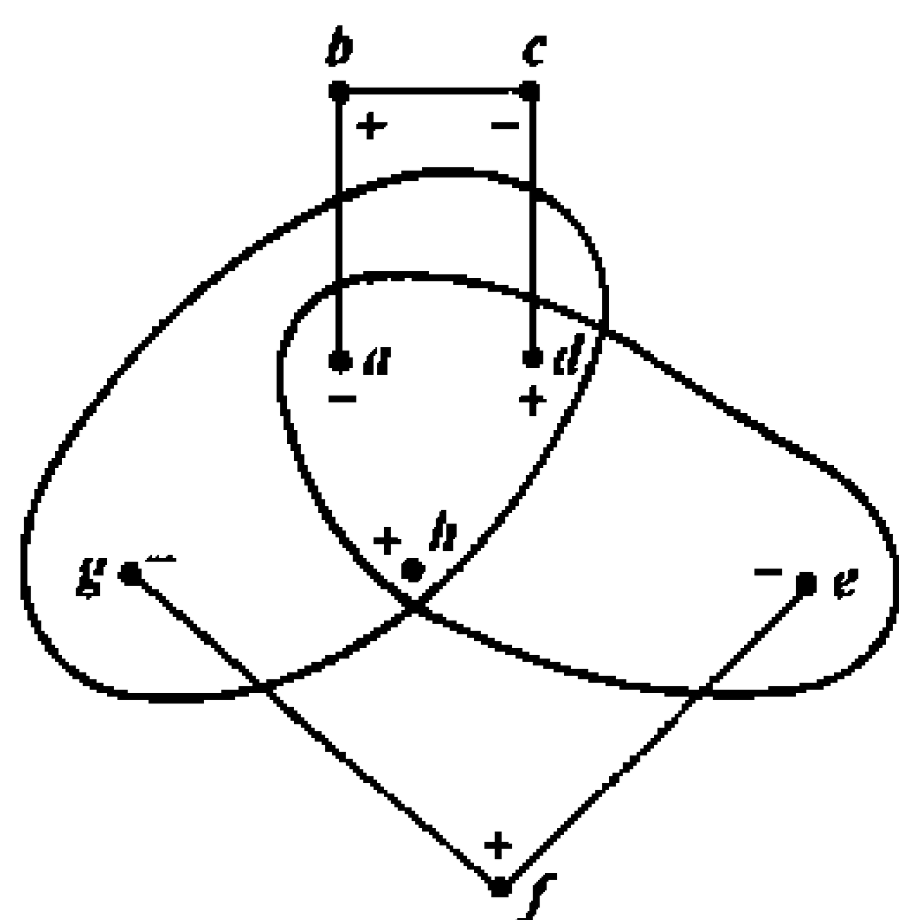



图 9 平衡超图（强单模的）

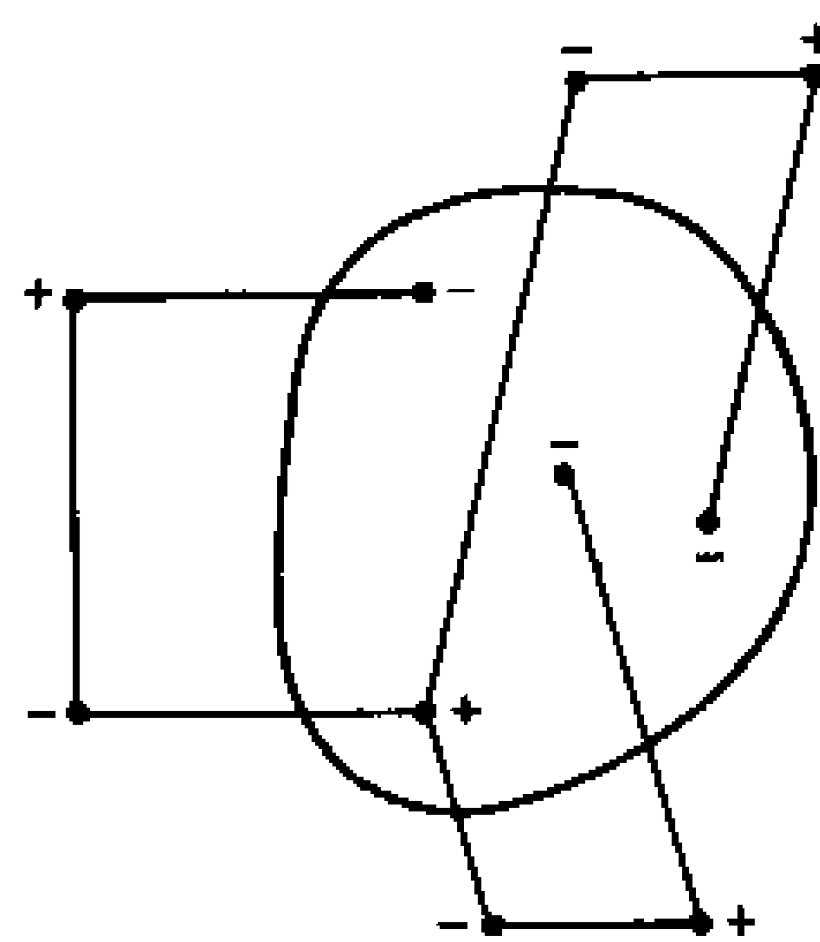


图 10 平衡超图（非单模的）

**性质 1** 完全平衡超图（平衡超图）的每个部分子超图是完全平衡的（平衡的）。

事实上，如果 $A$ 是 $H$ 的关联矩阵，则 $H$ 的部分超图的关联矩阵 $A'$ 是 $A$ 的子矩阵。因此如果 $B_k \subset A'$，则必定有 $B_k \subset A$。

**性质 2** 完全平衡超图（平衡超图）的对偶是完全平衡（平衡）的。

事实上，若 $A$ 是 $H$ 的关联矩阵，则 $A$ 的转置矩阵 $A^T$ 就是对偶超图 $H^*$ 的关联矩阵。因此如果 $B_k \subset A^T$，则 $B_k = (B_k)^T \subset A$。

**例 1** 单模超图。下面将证明每个单模超图是平衡的。设 $H$ 是单模超图但不是平衡的，则 $H$ 的关联矩阵 $A$ 含一个子矩阵 $B_k$，这里 $k \geqslant 3$ 是奇数。但是以 $B_k$ 为关联矩阵的超图是一个奇圈 $C_k$，$C_k$ 不存在均匀 2- 着色，由定理 4，$C_k$ 不是单模的，故 $B_k$ 不是全单模的。因此 $H$ 也不是单模的，矛盾。

显然其逆未必成立。图 10 所示的超图是平衡的，但不存在均匀 2- 着色。因此该超图不是单模的。

Berge([1969],[1972]) 为了将完全单模矩阵的一些性质推广，引进了上述平衡超图概念。

**例 2** 强单模超图。另一类平衡超图由 Gramar, Hammer 和 Ibaraki[1986] 给

出，称为强单模超图：它是一个平衡超图且没有这样的奇圈，它仅含的一条边恰含该圈上的三个顶点，而其余的边恰含该圈上的两个顶点。例如，图9所示的超图中，含有长度分别为5和7的奇圈，易见是强单模的。换句话说，$H$ 是强单模的当且仅当对每个奇数 $k$，它的关联矩阵不以 $B_k$ 作为子矩阵，也没有以 $B'_k$ 作为其子矩阵，这里 $B'_k$ 是将 $B_k$ 中的一个0改为1所得到的矩阵。结合前面的一些结果，易见若 $H$ 是强单模的，则它的对偶及部分子超图也是强单模的。

作者进一步证明了在强平衡超图 $H$ 中存在一个非空集 $S \subset X$，$S$ 与 $H$ 中每条非环边的交顶点个数为0或2。在图9中，$S = \{a, b, c, d\}$ 就是这样的一个子集。下面将证明 $H$ 是单模的：考虑上述的一个子集 $S_1$，则 $H_{X-S_1}$ 仍是强单模的。考虑相应的子集 $S_2$；同样在 $H_{X-S_1-S_2}$ 中又有一个相应的 $S_3$ 等等。每个子超图 $H_{S_i}$ 是二部多重图，故有一个均匀2-着色，设为红与蓝两色。当 $H$ 中所有的顶点被着色时，蓝色点集与红色点集构成 $H$ 的均匀2-着色。则由定理4，$H$ 是单模的。

**例3** 邻域超图。$T_0$ 是以 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为顶点集的树。$\mu[x_i, x_j]$ 表示 $T_0$ 中以 $x_i$ 与 $x_j$ 为端点的唯一的路，$d(x_i, x_j)$ 表示 $x_i$ 与 $x_j$ 之间的距离，即 $\mu[x_i, x_j]$ 的长度。对每个 $\rho \geqslant 0$，集合

$$T = \{x \mid x \in X, d(x, a) \leqslant \rho\}$$

称为以 $\rho$ 为半径、以 $a$ 为心的邻域。邻域簇 $H = (T_1, T_2, \cdots, T_m)$ 是一个超图，称为邻域超图。下面证明 $H$ 是完全平衡的。

反证法。若存在一个圈，设为

$$\sigma = (x_1, T_1, x_2, T_2, \cdots, x_k, T_k, x_{k+1} = x_1)$$

其中，$T_j = \{x \mid x \in X, d(x, a_i) \leqslant \rho_i\}$ 不含 $x_j$ $(j \neq i, i+1)$。

由于 $T_i \cap T_{i+1} \neq \emptyset$，有

$$d(a_i, x_i) \leqslant \rho_i, \qquad d(a_{i+1}, x_i) \leqslant \rho_{i+1}$$

故

$$d(a_i, a_{i+1}) \leqslant \rho_i + \rho_{i+1}$$

易知，在树 $T_0$ 中，至少存在三条交非空的路 $\mu[a_i, a_{i+1}]$。不妨设

$$y \in \mu[a_1, a_2] \cap \mu[a_p, a_{p+1}] \cap \mu[a_q, a_{q+1}]$$

及

$$d(y, x_1) \geqslant d(y, x_p) \geqslant d(y, x_q)$$

由于 $y \in \mu[a_1, a_2]$，则 $y \in \mu[a_1, x_1]$ 或 $y \in \mu[x_1, a_2]$。不妨设 $y \in \mu[a_1, x_1]$，于是有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \rho_1 - d(a_1, x_1) = \rho_1 - d(a_1, y) - d(y, x_1) \\ &\leqslant \rho_1 - d(a_1, y) - d(y, x_p) \\ &\leqslant \rho_1 - d(a_1, x_p) \end{aligned}$$

因此 $x_p \in T_1$。同理 $x_q \in T_1$。于是 $T_1$ 含有 $\sigma$ 中的至少三个顶点，矛盾。

**例 4**(Tamir [1985])　$T$ 是 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 上的一棵树。令 $S \subset X$，且 $|S| = k$。考虑例 3 的一般情形：对每个顶点 $x \in X$，从 $x$ 到 $S$ 中的不同顶点的距离序列

$$0 = d_0^x \leqslant d_1^x \leqslant d_2^x \leqslant \cdots \leqslant d_k^x$$

考虑由 $\{s \mid s \in S, d(x,s) \leqslant d_i^x\} \cup \{x\}$ 在 $T$ 中生成的最小子树 $T_i$，对每个整数 $\rho$，$d_{i-1}^x \leqslant \rho \leqslant d_i^x$，记

$$E(x,i,\rho) = \{y \mid y \text{ 是 } T_i \text{ 中满足 } d(x,y) \leqslant \rho \text{ 的顶点}\}$$

Tamir [1985] 证明了超图 $(E(x,i,\rho) \mid x,i,\rho)$ 是完全平衡的。

如果 $S = X$，这个超图就是例 3 中的邻域超图。如果 $S = \{x_1\}$，这个超图就是以 $x_1$ 为根的树形图的路超图。

**例 5**　两个完全平衡超图的合成(Lubiw [1985])。$H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 和 $H' = (F_1, F_2, \cdots, F_n)$ 都是 $X$ 上的超图，合成超图 $H_{H'}$ 是以 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 为顶点集对应于 $H'$ 的边集，它的边为 $\bar{E}_j = \{f_i \mid F_i \cap E_j \neq \varnothing\}$ 的超图。为了能得到 $H'$ 上的超图 $H_{H'}$，进一步假设每个 $F_i$ 至少与一个 $E_j$ 相交，每个 $E_j$ 至少与一个 $F_i$ 相交。

例如，考虑图 11 中树形图 $T$ 的两个子超图 $H = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ 和 $H' = (F_1, F_2, F_3, F_4)$，则 $H_{H'}$ 为图 12 所示。

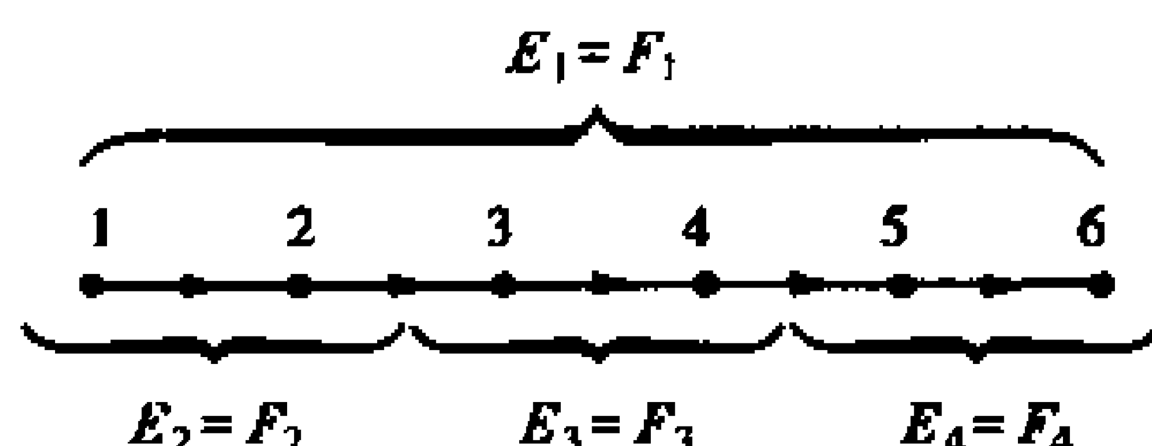



图 11

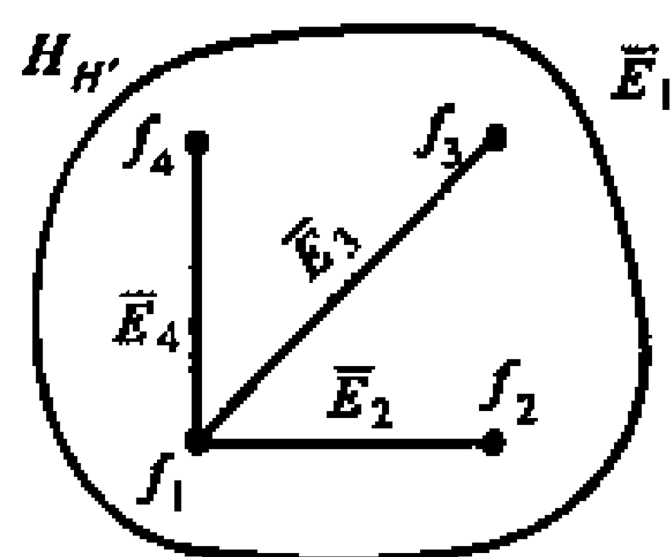



图 12

Lubiw [1985] 证明了如果 $H$ 和 $H'$ 都是完全平衡的，则它们的合成超图 $H_{H'}$ 也是完全平衡的。

**注**　从图 11 的超图看到，即使 $H$ 和 $H'$ 都是单模的，图 12 的 $H_{H'}$ 却不是单模的。

这个定理推广了下列结果：Frank [1977] 证明了如果 $H$ 和 $H'$ 都是树形图的路超图，则 $H_{H'}$ 是完全平衡的。Tamir [1983] 进一步证明了如果 $H$ 和 $H'$ 都是邻域超图，则 $H_{H'}$ 是完全平衡的。

**定理 8**　一个超图是平衡的充要条件是：它的每个诱导子超图是 2- 可着色的。

**证**　1. 为了证明这个条件是必要的，只需证明任意平衡超图是 2- 可着色的。反证法。设 $H$ 是一个 $\chi(H) \geqslant 3$、阶数最小的平衡超图。由 $H$ 的最小性，对每个

顶点 $x_0$，由 $X-\{x_0\}$ 诱导出的子超图有一个2-着色$(S_0,S'_0)$。又由于 $H$ 不是2-可着色的，这蕴含着 $H$ 中有两条基数为2的边与 $x_0$ 关联，设为$[x_0,y]$和$[x_0,y']$，其中 $y\in S_0,y'\in S'_0$。于是 $H$ 中基数为2的那些边的全体构成一个图 $G$，且对每个 $x\in X,d_G(x)\geqslant 2$。由于 $G$ 是平衡超图，因而 $G$ 是2-部图。令 $G_1$ 为 $G$ 的一个连通分支，由上可知，$G_1$ 至少有3个顶点。设 $x_1$ 为 $G_1$ 中的一个非割点。由 $X-\{x_1\}$ 诱导的 $H$ 的子超图有一个2-着色$(S_1,S'_1)$，则可给 $x_1$ 一个使 $G_1$ 中没有单色边的着色。因此，$H$ 中至少有两个顶点的每条边均含有两种颜色。这与 $\chi(H)\neq 2$ 矛盾。

利用定理1，也能证得 $H$ 是2-可着色的。

2. 下面证明对每个 $A\subset X$，子超图 $H_A$ 是2-可着色，则 $H$ 是平衡的。不然，存在一个奇圈$(a_1,E_1,a_2,E_2,\cdots,a_{2k+1},E_{2k+1},a_1)$，其中没有边含该圈上的三个顶点，则 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{2k+1}\}$ 的诱导子超图 $H_A$ 包含奇圈$C_{2k+1}$ 的边，故 $H_A$ 是非2-可着色的，矛盾。

**推论** 秩不超过3的超图 $H$ 是单模的充要条件是：$H$ 是平衡的。

**证** 设 $H$ 是秩不超过3的平衡超图，则存在 $H$ 的2-着色，并且这个2-着色必定是均匀的，上述结果同样适合于 $H$ 的每个子超图。因此由定理4，$H$ 是单模的。

**定理9** $H$ 是平衡超图，则对每个 $k\geqslant 2$，$H$ 有好$k$-着色。

**证** $H$ 是$X$上的一个平衡超图。当 $k=2$ 时，由定理8，结论成立。当 $k>2$ 时，考虑 $X$ 的$k$-分划$(S_1,S_2,\cdots,S_k)$。对每个 $E\in H$，用 $k(E)$ 表示在上述分划下 $E$ 中出现的颜色数。若每条边 $E\in H$ 满足$k(E)=\min\{|E|,k\}$，则，上述$k$-分划就是 $H$ 的一个好$k$-着色。若存在一条边 $E_0$ 有 $k(E_0)<\min\{|E_0|,k\}$。由于 $k(E_0)<|E_0|$，存在一个下标 $p$ 满足 $|S_p\cap E_0|\geqslant 2$，又由于 $k(E_0)<k$，存在下标 $q$ 满足 $|S_q\cap E_0|=0$。由性质1，由 $S_p\cup S_q$ 诱导的子超图是平衡的。因此存在一个2-着色$(\bar{S}_p,\bar{S}_q)$。令 $\bar{S}_i=S_i\ (i\neq p,q)$，则$(\bar{S}_1,\bar{S}_2,\cdots,\bar{S}_k)$ 也是 $X$ 的一个$k$-分划。对应的颜色数 $\bar{k}(E)$ 满足

$$\bar{k}(E)\geqslant k(E)\qquad (E\in H)$$
$$\bar{k}(E_0)=k(E_0)+1$$

上述$k$-分划的变换导致$\sum_{E\in H}[\min\{|E|,k\}-k(E)]$至少减少了1。重复这一过程，则能得到 $H$ 的一个好$k$-着色。

**推论1** 平衡超图具有边着色性质。

事实上，平衡超图 $H$ 的对偶超图$H^*$ 的秩为 $r(H^*)=\Delta=\Delta(H)$。在定理9中，令 $k=\Delta$ 就可得 $H$ 的一个强 $\Delta$-边着色。因此 $q(H)=\Delta(H)$。

将这结果应用到多重2-部图(见 Graphs，第12章，定理2)，就得到关于边着色

的 König 定理。

**推论 2** 平衡超图 $H$ 含 $k=\min_{E\in H}|E|$ 个两两不交的横贯集。

只需在定理 9 中取 $k=\min_{E\in H}|E|$ 即可。

将定理 9 应用到 2- 部图的对偶图中，就给出了 Gupta 的定理[1978]。

**推论 3**(Las Vergnas) 对超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$，令

$$k_0=\left\{\min_J\frac{1}{|J|}\left|\bigcup_{j\in J}E_j\right|\right\},\qquad \emptyset\neq J\subset\{1,2,\cdots,m\}$$

则对每个 $k\leqslant k_0$，$H$ 有一个好 $k$- 着色。

事实上，对每个 $J\neq\emptyset$，由 $k_0$ 的定义，有

$$|J|(k_0-1)<\left|\bigcup_{j\in J}E_j\right|$$

令 $k<k_0$，$k$ 满足定理 3 的推广中所需的条件。因此，存在对一切 $i$ 有 $E'_i\subset E_i$ 的无圈 $k$- 一致超图 $H'=(E'_1,E'_2,\cdots,E'_m)$。从而 $H'$ 是完全平衡超图，由定理 9，$H'$ 有一个好 $k$- 着色，当然 $H$ 也有好 $k$- 着色。

**定理 10**(Berger, Las Vergnas [1970]，这里的证明由 Lovász 给出) 超图 $H$ 是平衡的充要条件是：每个部分子超图具有 König 性质。

**证** 1. 充分性。若 $H$ 不是平衡的，则存在一个奇圈 $C=(x_1,E_1,x_2,E_2,\cdots,x_k,E_k,x_1)$，而该圈中的每条边恰含该圈上的 2 个顶点。令 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$，则 $H_A$ 是一个奇圈，它不具有 König 性质，矛盾。

2. 必要性。若 $H$ 是平衡的，则 $H'_A$ 也是平衡的。因此只需证明平衡超图满足 $\nu(H)=\tau(H)$ 即可。

令 $\tau(H)=t$。$H'$ 是满足 $\tau(H')=t$ 且边数最少的 $H$ 的部分超图。

假设 $H'$ 中存在两条边 $E'_1$ 和 $E'_2$ 满足 $E'_1\cap E'_2\neq\emptyset$。令 $x_0\in E'_1\cap E'_2$，则在 $H'-E'_1$ 中存在一个横贯 $T_1$，以及在 $H'-E'_2$ 中存在一个横贯 $T_2$，均有 $|T_1|=t-1$，$|T_2|=t-1$。令 $Q=T_1\cap T_2$，$R_i=T_i-Q$ $(i=1,2)$，$S=R_1\cup R_2\cup\{x_0\}$。由于子超图 $H'_S$ 是平衡的，因此存在一个 2- 着色 $(S_1,S_2)$。由于 $|S|=2|R_1|+1$，故这两个色类中有一个，不妨设为 $S_1$，满足 $|S_1|\leqslant|R_1|$。显然 $E'_1\cap S$ 至少有两个顶点，其中之一是 $x_0$，所以 $E'_1$ 与 $S_1$ 相交，故 $E'_1$ 与 $S_1\cup Q$ 相交。类似地，$E'_2$ 与 $S_1\cup Q$ 也相交(见图 13)。

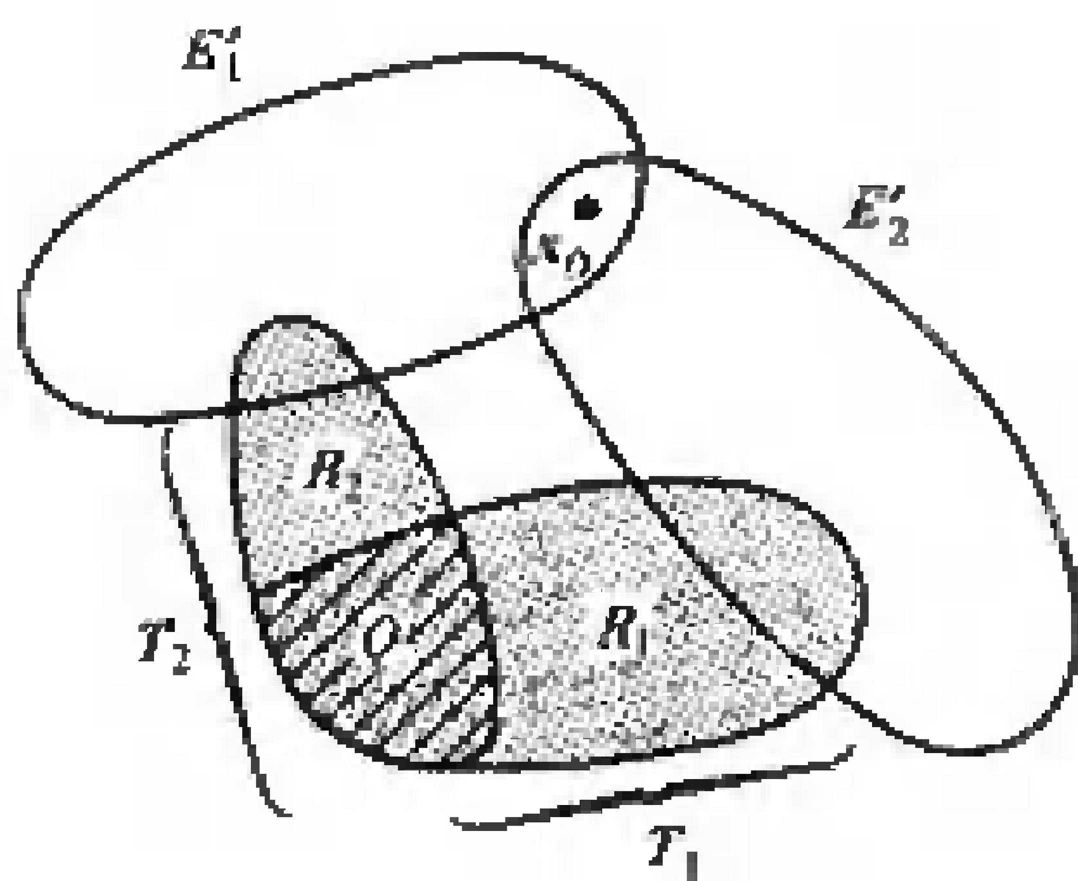



图 13

对 $i\neq1,2$，$H'$ 中的边 $E'_i$ 或与 $Q$ 相交或与 $R_1\cup R_2$ 相交至少有 2 个顶点，且

此时 $E'_i$ 与 $S_1$ 相交。因此，$S_1 \cup Q$ 是 $H'$ 的横贯。这蕴含着

$$\tau(H) \leqslant |S_1 \cup Q| \leqslant |R_1| + |Q| = t - 1$$

这与 $\tau(H) = t$ 的假设矛盾。于是证明了 $H'$ 中的边两两不相交。故有

$$\nu(H) \geqslant \nu(H') = \tau(H') = \tau(H) \geqslant \nu(H)$$

由此推得 $\nu(H) = \tau(H)$。

**推论 1**　每一个平衡超图具有 Helly 性质并且是保形的。

**证**　设 $H$ 是平衡超图，令 $H' \subset H$ 是一个交簇。由于 $H$ 是平衡的，由定理 10，$\tau(H') = \nu(H') = 1$，因此对 $H'$ 的所有边来说存在一个公共顶点。所以 $H$ 具有 Helly 性质。又由于平衡超图的对偶超图 $H^*$ 是平衡的，故 $H^*$ 具有 Helly 性质，从而 $H$ 是保形的。

**推论 2**　$H$ 是有 $m$ 条边 $n$ 个顶点的超图，则 $H$ 是平衡的充要条件是：对每个 $c \in \{1, +\infty\}^n$ 和 $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^m$，有

$$N_{\substack{-\max \\ y \in Q(c)}} \langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{y} \rangle = N_{\substack{-\min \\ t \in P(d)}} \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{t} \rangle$$

**证**　1. 设 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 是使定理中等号成立的超图。考虑部分超图 $H'_A$，且令

$$c_i = 1 \qquad (\text{若 } x_i \in A)$$
$$c_i = +\infty \qquad (\text{若 } x_i \notin A)$$
$$d_j = 1 \qquad (\text{若 } E_j \in H'_A)$$
$$d_j = 0 \qquad (\text{若 } E_j \notin H'_A)$$

则对 $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 和 $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_m)$，有

$$\nu(H'_A) = N_{\substack{-\max \\ y \in Q(1)}} \langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{y} \rangle = N_{\substack{-\min \\ t \in P(d)}} \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{t} \rangle = \tau(H'_A)$$

因此，由定理 10，$H$ 是平衡的。

2. 设 $H$ 是一个平衡超图。我们只需证明对每个 $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^m$，有

$$N_{\substack{-\max \\ y \in Q(1)}} \langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{y} \rangle = N_{\substack{-\min \\ t \in P(d)}} \langle 1, \boldsymbol{t} \rangle$$

若对 $H$ 的每条边 $E_j$ 赋予一个“权”整数 $d_j \geqslant 0$，则只需证明所有匹配中的最大权等于所有 $\boldsymbol{d}$-横贯中的最小值即可。对整数 $\lambda > 0$，将边 $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ 复制 $\lambda$ 次：用 $X_i = \{x_i^1, x_i^2, \cdots, x_i^\lambda\}$ 代替 $E$ 中每个顶点 $x_i$，将边 $E$ 复制为 $\lambda$ 条新边 $E^1 = \{x_1^1, x_2^1, \cdots, x_r^1\}$，$E^2 = \{x_1^2, x_2^2, \cdots, x_r^2\}, \cdots, E^\lambda = \{x_1^\lambda, x_2^\lambda, \cdots, x_r^\lambda\}$。对边 $E$ 复制 0 次就相当于在 $H$ 中将边 $E$ 去掉。

在每一种情况下，所得超图是平衡的。对 $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_m)$，用 $H^{[d]}$ 表示在 $H$ 中将 $E_1$ 复制 $d_1$ 次，$E_2$ 复制 $d_2$ 次，…，$E_m$ 复制 $d_m$ 次所得到的超图。

则易知有

$$N_{\substack{-\max \\ y \in Q(1)}} \langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{y} \rangle = \nu(H^{[d]})$$

$$N \min_{t \in P(d)} \langle \mathbf{1}, t \rangle = \tau(H^{[d]})$$

由于 $H^{[d]}$ 是平衡超图，由定理 10，故上述两个系数相等。推论成立。

**定理 11**(Fulkerson, Hoffman, Oppenheim[1974]) $H$ 是有 $m$ 条边、$n$ 个顶点的超图，则对每个 $c \in \mathbf{N}^n$，有

$$N \max_{y \in Q(c)} \langle \mathbf{1}, y \rangle = N \min_{t \in P(1)} \langle c, t \rangle$$

(*)证　假设读者了解线性规划理论。

1. 下面将证明规划：

(1) $\min\langle c, t\rangle$ 对 $t \in P(1)$

有整解。

由定理 10 的推论 2，多面体

$$Q = \{y \mid y \in \mathbf{R}^m, y > \mathbf{0}, Ay \leqslant \mathbf{1}\}$$

中使 $\langle d, y\rangle$ 达到最大值的 $y$ 为整点 $y_0$。由于 $Ay_0 \leqslant \mathbf{1}$，故 $y_0$ 的坐标为 0 或 1。

对每个 $d \in \mathbf{N}^m$，易见 $Q$ 的所有极值点的坐标为 0,1(见本章后面 §6 中的引理 1)。超平面簇 $\{y \mid y \in \mathbf{R}^m, Ay = 1\}$ 围成了凸多面体 $Q$，多面体

$$\bar{Q} = \{y \mid y \in \mathbf{R}^m, y \geqslant \mathbf{0}, Ay = \mathbf{1}\}$$

的极值点的坐标是 0,1。令 $z$ 是多面体

$$\{y \mid y \in \mathbf{R}^m, y \geqslant \mathbf{0}, Ay \geqslant \mathbf{1}\}$$

的一个极值点，则 $z$ 也是多面体

$$\{y \mid y \in \mathbf{R}^m, y \geqslant \mathbf{0}, Ay = \mathbf{1}\}$$

的极值点。故 $z$ 有整坐标。将这结论应用于 $H$ 的对偶 $H^*$，由于 $H^*$ 也是平衡的，则多面体

$$P(\mathbf{1}) = \{t \mid t \in \mathbf{R}^n, t \geqslant \mathbf{0}, A^{\mathrm{T}} t \geqslant \mathbf{1}\}$$

的极值点有整坐标。故 1. 成立。

2. 下面将证明规划：

(2) $\max\langle \mathbf{1}, y\rangle$ 对 $\forall y \in Q(c)$

有一个整点解。

下面对 $\sum c_i = \lambda$ 和 $m$ 进行双重归纳：当 $\lambda = 1$ 或 $m = 1$ 时这个结论是显然的。

设 $z = (z_1, z_2, \cdots, z_m)$ 是(2)的一个分数解。若 $z_j = 0$，将 $A$ 中第 $j$ 列元素去掉，得到 $A$ 的只有 $m-1$ 列的子矩阵，由归纳假设知，相应的(2)有整点解。因此，下面对每个 $j$，可假设 $z_j > 0$。

由 1. 及对偶定理，$\langle \mathbf{1}, z\rangle = k$ 是一个整数。设矩阵 $A$ 的第 $i$ 个行矢量 $a^i$ 满足 $\langle z, a^i\rangle < c_i$。若 $\langle z, a^i\rangle \leqslant c_i - 1$，对 $\lambda - 1$ 用归纳假设，(2) 有整点解 $\bar{z}$ 满足 $\langle \mathbf{1}, \bar{z}\rangle = \langle \mathbf{1}, z\rangle = k$。因此，下面可假设 $\langle z, a^i\rangle = c_i - 1 + \varepsilon$，其中 $0 < \varepsilon < 1$，则存在一个

矢量 $\bar{z} \in P(c_1, c_2, \cdots, c_i - 1, \cdots, c_n)$ 满足 $\bar{z} \leqslant z$，$\langle \mathbf{1}, \bar{z} \rangle = k - \varepsilon$。对 $\lambda - 1$ 用归纳假设，存在整矢量 $\bar{\bar{z}}$ 满足

$$\bar{\bar{z}} \geqslant 0, \qquad A\bar{\bar{z}} \leqslant (c_1, c_2, \cdots, c_i - 1, \cdots, c_n) \leqslant c, \qquad \langle \mathbf{1}, \bar{\bar{z}} \rangle \geqslant k - \varepsilon$$

因此 $\langle \mathbf{1}, \bar{\bar{z}} \rangle = k$，结论成立。

因此，下面假设对每个 $i$ 和 $j$ 有 $\langle z, a^i \rangle = c_i$ 和 $z_j > 0$。根据线性规划的互补松弛原理，对偶规划

(3) $\min\langle c, x \rangle \, \forall x \in P(1)$

的每个最优解 $\bar{x}$ 满足 $A^{\mathrm{T}}\bar{x} = \mathbf{1}, x \geqslant \mathbf{0}, \langle c, \bar{x} \rangle = k$。因此，$\bar{z}$ 如 $\bar{x}$ 分别是以下互为对偶规划：

(4) $\min\langle \mathbf{1}, y \rangle \, \forall y \in \{ y \mid y \in \mathbf{R}^m, y \geqslant \mathbf{0}, Ay \geqslant c \}$ ①

(5) $\max\langle c, x \rangle \, \forall x \in \{ x \mid x \in \mathbf{R}^n, x \geqslant \mathbf{0}, A^{\mathrm{T}}x \leqslant \mathbf{1} \}$

的最优解。因此 $\langle \mathbf{1}, \bar{z} \rangle = \langle c, \bar{x} \rangle$。

在 1. 中已知，存在一个整矢量 $\bar{z}$，使 $\bar{z} \geqslant \mathbf{0}, A\bar{z} \geqslant c, \langle \mathbf{1}, \bar{z} \rangle = k$。若 $A\bar{z} = c$，则结论成立。因此假设存在一个 $i \leqslant n$，$\langle z, a^i \rangle > c_i$。由于对每个 $j$ 有 $z_j > 0$，故存在 $0 < \varepsilon < 1$，使得对一切 $j$ 有 $z_j > (1 - \varepsilon)\bar{z}_j$。

令

$$w = \frac{1}{\varepsilon}[z - (1 - \varepsilon)\bar{z}]$$

则 $z = (1 - \varepsilon)\bar{z} + \varepsilon w, w \geqslant \mathbf{0}, \langle \mathbf{1}, w \rangle = k$。由 $Az = c$ 和 $A\bar{z} \geqslant c$，可推出 $Aw \leqslant c$。此外，由于存在 $i$ 使得 $\langle z, a^i \rangle > c_i$，故有 $\langle w, a^i \rangle < c_i$。于是 $w$ 是(2) 的一个解，且对某个 $i \leqslant n$，$\langle w, a^i \rangle < c_i$。再用归纳假设，可得规划(2) 有一个整点解 $\bar{w}$。

由(1)、(2) 及线性规划理论知，定理成立。

**注**　设 $H$ 是平衡超图。由定理 11 和定理 10 的推论 2，有很多的 $c$ 和 $d$ 满足：

$$N \max_{y \in Q(c)} \langle d, y \rangle = N \underset{t \in P(d)}{-\min} \langle c, t \rangle$$

但对于平衡超图来说，并不是像单模超图那样，对所有的 $c$ 和 $d$ 这个等式均成立。

作为例子，考察图 12 中的平衡超图，取 $c = (3,2,2,2)$ 和 $d = (2,1,1,1)$。矢量 $t = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 是它的一个分数 $d$- 横贯，因为它满足

$$\sum_{f_i \in E_j} t_i \geqslant d_j \qquad (j = 1,2,3,4)$$

而矢量 $y = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 是它的一个分数 $c$- 匹配，因为它满足

$$\sum_{j \mid f_i \in E_j} y_j \leqslant c_i \qquad (i = 1,2,3,4)$$

---

① 原文误为 $y \in Q(c)$。

于是有$\langle \boldsymbol{d},\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{c},\boldsymbol{t}\rangle = \frac{9}{2}$。但显然有

$$N_{\max_{y\in Q(c)}}\langle \boldsymbol{d},\boldsymbol{y}\rangle < \frac{9}{2} < N_{\min_{t\in P(d)}}\langle \boldsymbol{c},\boldsymbol{t}\rangle$$

故最大 - 最小等式不成立。

应用(选址问题) $T$ 是 $X = \{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的一棵树,我们可以把顶点 $x_i$ 理解为能把商品卖到所有满足 $d(x,x_i)\leqslant \rho_i$ 的顶点 $x$ 处的销售中心,这里 $\rho_i$ 是一个给定的非负整数。此外,对每个 $x_i$,作为销售中心有一个年度维护成本 $c_i$。问题是选取销售中心集合,能使所有的顾客买到销售中心的商品,且使年度总的维护成本最低。令 $H$ 是以

$$T_i = \{x \mid d(x,x_i)\leqslant \rho_i\}$$

为边的超图,则问题是求 $H$ 的最小费用的覆盖,即求对偶超图 $H^*$ 中最小费用的横贯。由定理 11,有

$$N_{\max_{y\in Q(c)}}\langle \boldsymbol{1},\boldsymbol{y}\rangle = N_{\min_{t\in P(1)}}\langle \boldsymbol{c},\boldsymbol{t}\rangle$$

因此 $H$ 的最小费用覆盖等于 $H$ 的边 $E_j$ $(j = 1,2,\cdots,m)$ 中出现至多为 $c_j$ 次的这些顶点簇的最大基数。Tamir [1983],Kolen[1982],Farber[1984],Lubiw[1985] 他们都给出了确定最优选址的多项式算法。

为了判别超图是否为完全平衡的和确定最优的 $d$- 值 $c$- 匹配,利用 $d$- 维矢量空间上的一个特殊的序关系是有用的(Lubiw[1974])。这个关系称为逆字典序,记为 $\widetilde{<}$,其定义为:

$$(r_1,r_2,\cdots)\ \widetilde{<}\ (s_1,s_2,\cdots)$$

当且仅当其最大下标 $k$ 使得 $r_k \neq s_k$ 且 $r_k < s_k$。

**引理 1** 在一个(0,1)- 矩阵中,它的行和列矢量能同时按逆字典序排序。

**证** $A = (a_{ij})$ 是 $n\times m$ 的(0,1)- 矩阵。考虑矢量 $\boldsymbol{d}_A = (d_2,d_3,\cdots,d_{m+n})$,其中 $d_k = \sum_{i+j=k} a_{ij}$。

若有两个下标 $j_1,j_2$ 满足 $j_1 < j_2$,但对应的两个列矢量 $\boldsymbol{a}_{j_1}$ 和 $\boldsymbol{a}_{j_2}$ 有 $\boldsymbol{a}_{j_2}\ \widetilde{<}\ \boldsymbol{a}_{j_1}$,则把第 $j_1$ 列与第 $j_2$ 列互换得到矩阵 $A'$ 满足 $\boldsymbol{d}_A\ \widetilde{<}\ \boldsymbol{d}_{A'}$。对原来的矩阵 $A$ 作上述一系列行的互换和列的互换后,使 $\boldsymbol{d}_A$ 在逆字典序下最大,最后所得的矩阵就满足引理要求。

**引理 2** 若矩阵 $A = (a_{ij})$ 的行和列按逆字典序排序。又若 $A$ 含子矩阵

$$B = \begin{bmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

这里 $i_1 < i_2, j_1 < j_2$，则在超图 $H$ 中，顶点 $x_{i_1}, x_{i_2}$ 和边 $E_{j_1}, E_{j_2}$ 出现在一个长度至少是 3 的圈上，且该圈没有一条边含这个圈上的 3 个顶点。

容易通过归纳构造在给定子矩阵下的一个非平衡圈。

**定理 12**(Hoffman, Sakarovitch, Kolen[1985], Lubiw[1985])　设 $A = (a_{ij})$ 是超图 $H$ 的关联矩阵，下述论断等价：

(ⅰ) 矩阵 $A$ 的行、列按逆字典序排序后不含上述子矩阵 $B$；

(ⅱ) 存在 $A$ 的行、列的一个排列，使所得到的矩阵不含上述子矩阵 $B$；

(ⅲ) 超图 $H$ 是完全平衡的。

**证**　(ⅰ)⇒(ⅱ)。显然。

(ⅱ)⇒(ⅲ)。事实上，若 $H$ 不是完全平衡的，则存在一个长度至少是 3 的圈

$$(x_{i_1}, E_{j_1}, x_{i_2}, E_{j_2}, \cdots, E_{j_k}, x_{i_1})$$

其中的每条边恰含该圈上的 2 个顶点，则 $A$ 的由第 $i_1, i_2 \cdots$ 行和第 $j_1, j_2 \cdots$ 列生成的子矩阵中，无论对其行和列如何排序，每行、每列恰好有两个元素是 1。那么，第一行元素为 1 的两列分别为第 $j'_1, j'_2$ $(j'_1 < j'_2)$ 列和第 $j'_1$ 列中另一个 1 所在的行一起构成 $A$ 的一个子矩阵 $B$，这与(ⅱ)相矛盾。

(ⅲ)⇒(ⅰ)。由引理 2 可得结论。

**注 1**　条件(ⅰ)对超图提供了一个是否为完全平衡的有效算法(Lubiw[1985], Hoffman, Sakarovitch, Kolen[1985])。这个算法执行起来比先前由 Fagin[1983], Farber[1983], Anstee 和 Farber[1984]所提供的多项式算法更好。显然，识别问题对研究数据库有着实际的意义(Fagin[1983])。

**注 2**　Hoffman, Sakarovitch 和 Kolen 称一个(0,1)-**是贪婪的**：若它满足条件(ⅱ)。他们证明了对每个 $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^m$ 和 $\boldsymbol{c} \in \mathbf{N}^n$ 可通过贪婪算法得到最大 $\boldsymbol{d}$- 值 $\boldsymbol{c}$- 匹配的充要条件是：矩阵 $A$ 是贪婪的。因此，这是完全平衡矩阵的特征性质。此外，$\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbf{N}^n$ 时，他们指出了如何通过多项式时间来得到最小 $c$- 值 $\boldsymbol{d}$- 横贯。

**注 3**　Farber[1982], Lehel[1984]独立地从不同方向得到了图论与完全平衡超图之间的关系。称图 $G$ 是**三角剖分的**：若 $G$ 中每个长度至少是 4 的圈均有弦(见 Graphs, 第 16 章, §3)。$G$ 的"太阳"是 $G$ 中的一个如下子图：它由集合 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_k, b_1, b_2, \cdots, b_k\}$ 所诱导的子图，这里 $k \geqslant 3$ 且这个子图是由 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 上的完全图和圈 $\{a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, b_k, a_1\}$ 的并构成。Farber 证明了关于 $X$ 上的图 $G$，下列各条件等价：

(1) $G$ 是三角剖分的且不含"太阳"；

(2) $G$ 的每个含 $x$ 的子图 $G'$，簇 $(\{y\} \cup \Gamma_{G'}(y) \mid y \in \Gamma_{G'}(x))$ 在包含关系下是全序的；

(3) 存在顶点集合 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的一个标号，使 $G$ 的邻接矩阵不含子矩阵 $B$；

(4) $(\{x\}\cup\Gamma_G(x)\mid x\in X)$构成$X$上的一个完全平衡超图；

(5) $G$ 的最大团构成$X$上的一个完全平衡超图。

# 4 树形超图

超图 $H$ 是树形的，若

(1) $H$ 具有 Helly 性质；

(2) 每个长度至少是 3 的圈中一定含有 3 条边其交是非空的。

若超图 $H$ 的树偶是树形的，则称 $H$ 是**余树形的**，也即 $H$ 满足：

(1′) $H$ 是保形的；

(2′) 每个长度至少是 3 的圈中，$H$ 中存在一条边含圈上三个顶点。

**例** 完全平衡超图既是树形的又是余树形的。事实上，由定理 10 的推论 1，完全平衡超图 $H$ 满足(1) 和(1′)。另外，显然 $H$ 也满足(2) 和(2′)。事实上，超图 $H$ 是完全平衡的充要条件是：$H$ 的任意诱导子超图是树形的。

在图 14 所示的超图中，其边为 $abd$，$bcd$，$acd$，是树形的，由于 $a$，$b$，$c$ 是某个圈中的三个顶点，但没有一条边包含这三个顶点，故这个超图不是完全平衡的。

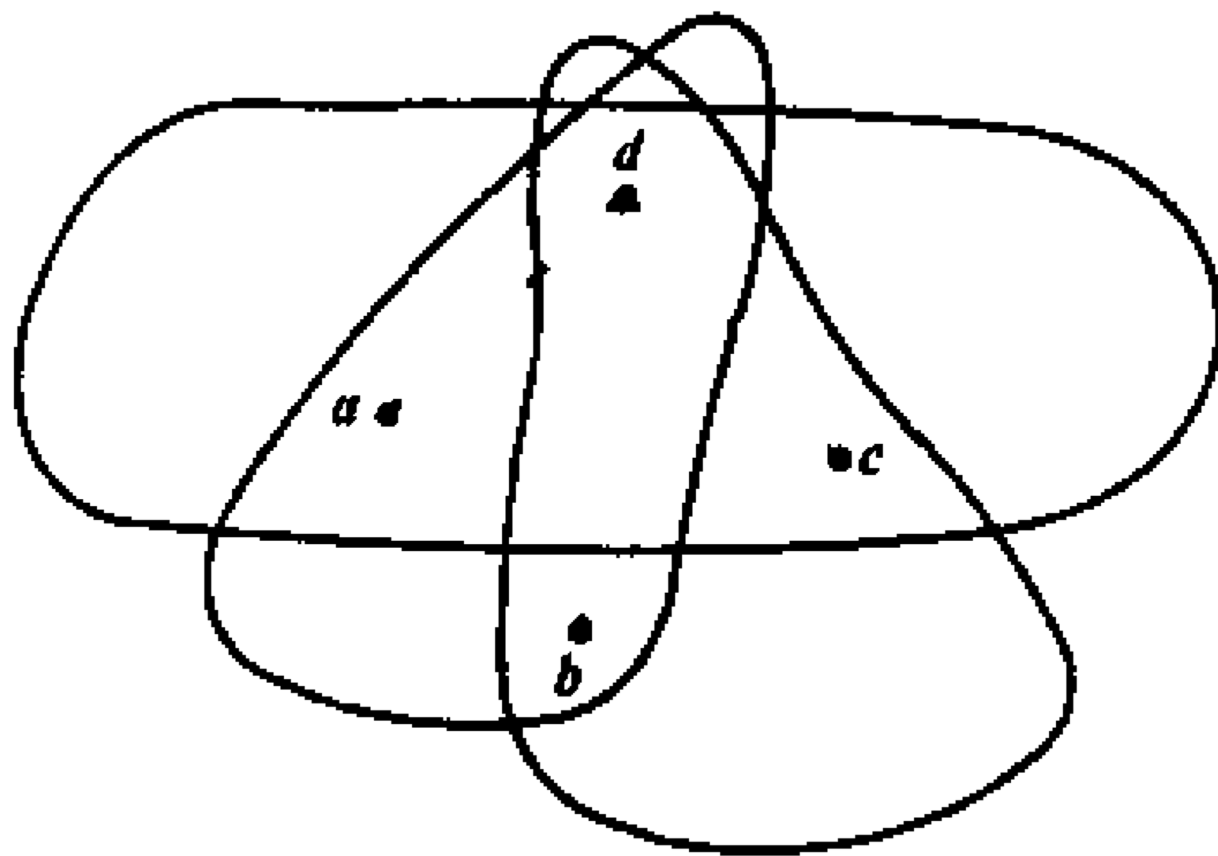



图 14 树形超图(非完全平衡超图)

**定理 13** 一个简单超图 $H$ 是一个三角剖分图的极大团簇的充要条件是：$H$ 为余树形的。

**证** 1. 设 $H$ 是简单余树形超图。由(1′)，$H$ 是保形的，它是 $H$ 的 2-截口 $G=[H]_2$ 的极大团超图。此外 $G$ 是三角剖分的，否则 $G$ 中存在一个长度至少是 4 而无弦的圈，这个圈对应于超图 $H$ 中是一个没有一条边含该圈中的三个顶点的圈。这与(2′) 矛盾。

2. 设 $H$ 是三角剖分图 $G$ 的极大团超图，则 $H$ 是保形的，因此满足(1′)。此外，设 $\mu=(a,b,\cdots)$ 是 $G$ 的一个圈，若 $\mu$ 的长度为 3，由于 $H$ 是保形的，$H$ 有一条边含 $\mu$ 的三个顶点。若 $\mu$ 的长度至少是 4，因为 $G[\mu]$ 是三角剖分的，边 $[a,b]$ 必含在一个三角形上，即在 $\mu$ 中存在 $x$，使 $a,b,x$ 构成一个三角形。所以 $\{a,x,b\}$ 必含在

$G$ 的一个极大团中，这个团就是 $H$ 的一条边。因此条件(2′)满足。所以 $H$ 是余树形的。

**推论**　超图 $H$ 是树形的充要条件是：$H$ 具有 Helly 性质且线图 $L(H)$ 是三角剖分的。

事实上，由第 1 章 §8 中的性质 1 知，若超图 $H$ 具有 Helly 性质，则 $G$ 是 $H$ 的线图当且仅当 $H^*$ 是 $G$ 的极大团超图(当然也可能含 $G$ 的其他团)。从定理 13，$G$ 是三角剖分当且仅当 $H^*$ 是余树形的，即 $H$ 是树形的。

**引理**　$H$ 是一个无环树形超图，则存在 $x_0 \in X$，使得 $H$ 中所有含 $x_0$ 的边有一个异于 $x_0$ 的公共顶点 $y_0$。

**证**　设 $(x_1, E_1, x_2, E_2, \cdots, x_q, E_q, x_{q+1}, \cdots, E_p, x_{p+1})$ 是 $H$ 中满足当 $|i-j|>1$ 时，$E_i \cap E_j = \emptyset$，$x_1 \notin E_2$ 和 $x_{p+1} \notin E_{p-1}$ 的一条最长路，令 $x_0 = x_{p+1}$。对于 $E_\lambda \in H, x_0 \in E_\lambda, |E_\lambda| \neq 1, E_\lambda \neq E_p$，由于这条路的最长性，存在 $q \leqslant p-1$，使得 $E_\lambda \cap E_q \neq \emptyset$。

若 $q$ 是满足上述条件且下标最大的一个数，则边 $E_q, E_{q+1}, \cdots, E_p, E_\lambda$ 构成 $H$ 的一个圈。由于 $H$ 是树形的，则必有

$$E_\lambda \cap (E_q \cap E_{q+1}) \neq \emptyset$$

由 $q$ 的最大性，$q = p-1$。因此，对每个 $E_\lambda \in \{E \mid E \in H, x_0 \in E, |E| \neq 1\}$，有 $E_\lambda \cap E_{p-1} \cap E_p \neq \emptyset$，但 $x_0 \notin E_{p-1}$。因此，$(E_\lambda \mid E \in H, x_0 \in E, |E| \neq 1) \cup \{E_p, E_{p-1}\}$ 形成一个交簇。由于 $H$ 具有 Helly 性质，这些边有一个公共顶点 $y_0 \neq x_0$。

**定理 14**(Duchet[1978],Flament[1978],Slater[1978])　$X$ 上的超图 $H$ 是树形的当且仅当存在 $X$ 上的一棵树 $T$，使得 $H$ 的每条边诱导出 $T$ 的一棵子树。

**证**　1. 设 $H$ 是树 $T$ 的子树的超图。由第 1 章中的定理 10 后面的应用可知：$H$ 具有 Helly 性质。此外，$H$ 的一个长度至少是 3 且其中不存在交是非空的三条边的圈 $(x_1, E_1, x_2, E_2, \cdots, x_k = x_1)$ 确定了 $T$ 的一簇路 $\mu[x_1, x_2], \mu[x_2, x_3], \cdots$，其中当 $j > i+1$ 时，$x_j \notin \mu[x_i, x_{i+1}]$。这与 $x_1 = x_k$ 相矛盾。故 $H$ 是树形的。

2. 设 $H$ 是 $X$ 上的一个树形超图。下面将通过对 $|X|$ 的归纳证明存在一棵满足要求的树 $T$。

设 $x_0, y_0$ 是在上述引理中所确定的 $H$ 中的两个顶点，由 $\overline{X} = X - \{x_0\}$ 所诱导的子超图 $\overline{H}$ 满足(1)和(2)，因此 $\overline{H}$ 也是树形的。于是由归纳假设，对 $\overline{H}$ 来说存在满足要求的 $\overline{X}$ 上的树 $\overline{T}$。显然，$T = \overline{T} + [x_0, y_0]$ 就是定理所要求的树。

(上述的新证明由 Duchet 给出)

**应用**　若把目前存在的动物物种作为超图的顶点，具有共同遗传特征的动物物种作为边，根据进化论学说，这个超图是树形的。

图14所示的超图是树形的,对应的树 $T$ 是唯一的。一般地,一个超图可对应于多棵树。Duchet[1985] 完整地刻画了这类树。

为了能判断给定的超图是否为树形的,Acharya和 Las Vergnas推广了"图的圈秩"的概念。

设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是 $X$ 上的一个超图,其线图为 $L(H)$,对于它的每条边 $u=[e_i,e_j]$,将整数 $w(u)=|E_i\cap E_j|$ 作为 $u$ 的权。若 $F$ 是 $L(H)$ 中的森林,将 $F$ 的权定义为 $w(F)=\sum\limits_{u\in F}w(u)$。

下面定义超图 $H$ 的圈秩为:

$$\mu(H)=\sum_{j=1}^{m}|E_j|-|X|-w_H$$

这里 $w_H=\max\limits_{F\subset L(H)}w(F)$,$F$ 为 $L(H)$ 中的森林。

例如,读者可以证明图15所示的超图含一个最大权为5的树 $F$,则 $H$ 的圈秩是 $\mu(H)=12-6-5=1$。

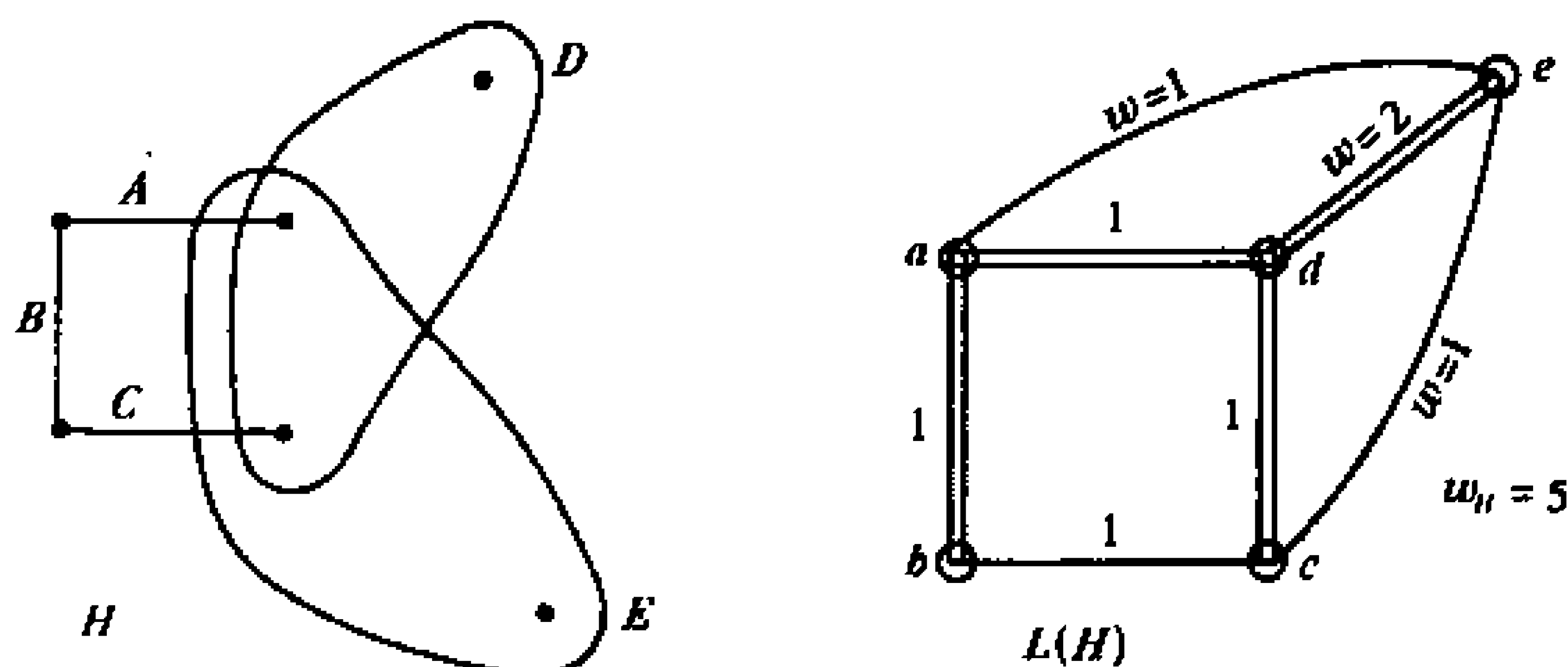



**图15　一个平衡的而不是余树形的超图以及它所对应的赋权线图**

圈秩 $\mu(H)$ 的确定并不困难,实际上是归结为在带正权图中确定最大权森林的古典问题。不同算法的复杂性(如Kruskal,Solin,Hell等)已被研究。例如,Kruskal的贪婪算法:在带权图中,从森林的一条边出发,在未选的边中逐次选取权最大且与已选取的边不构成圈的边。

**注**　若 $H$ 是有 $m$ 条边、$n$ 个顶点和 $p$ 个连通分支的线性超图,若 $L(H)$ 的每条边的权为1,因而具有最大权的森林 $F$ 的权为 $w(F)=n(F)-p(F)=m-p$,则

$$\mu(H)=\sum|E_j|-n-m+p$$

特别地,若 $H$ 是简单图,则

$$\mu(H)=2m-n-m+p=m-n+p$$

这就是通常的简单图圈秩的表达式。

若 $H$ 仅有一条边 $E_1$,则

$$\mu(H) = |E_1| - |E_1| = 0$$

若 $H$ 恰好有两条边 $E_1$ 和 $E_2$，则

$$\mu(H) = |E_1| + |E_2| - |E_1 \cup E_2| - |E_1 \cap E_2| = 0$$

若 $H$ 的边数大于 2，则有 $\mu(H) \geqslant 0$。通过对边数归纳，可得下面的性质：

**性质 1**　设 $H$ 是边数大于 2 的超图，则存在 $H$ 的一条边 $E_1$，使得 $\mu(H) \geqslant \mu(H - E_1)$。此外，还存在一条边 $E_2$，使得

$$\mu(H) - \mu(H - E_1) \geqslant |E_1| - |E_1 \cap E_2| - |E_1 - \bigcup_{j \neq 1} E_j| \geqslant 0$$

**证**　设 $F$ 是 $L(H)$ 中权最大的森林，$e_1$ 是 $F$ 中度为 1 的一个顶点，$e_2$ 是 $F$ 中与 $e_1$ 相邻的一个顶点。$E_1$ 是对应于 $e_1$ 的 $H$ 中的边，则部分超图 $H' = H - E_1$ 满足

$$w_{H'} \geqslant w(F - [e_1, e_2]) = w_H - |E_1 \cap E_2|$$

因此，

$$\begin{aligned}\mu(H) - \mu(H') &= \sum |E_j| - |\cup E_j| - w_H - (\sum |E_j| - |E_1|) + \\ &\quad (|\cup E_j| - |E_1 - \bigcup_{j\neq 1} E_j|) + w_{H'} \\ &\geqslant |E_1| - |E_1 - \bigcup_{j \neq 1} E_j| + w_{H'} - w_H \\ &\geqslant |E_1| - |E_1 - \bigcup_{j \neq 1} E_j| - |E_1 \cap E_2| \geqslant 0\end{aligned}$$

**定理 15**(Acharya, Las Vergnas [1981])　超图 $H$ 满足 $\mu(H) = 0$ 的充要条件是：$H$ 是余树形的。

**证**　1. $H$ 是 $X$ 上的余树形的超图。对 $\sum_{j=1}^{m} |E_j|$ 归纳来证明 $\mu(H) = 0$。

若 $\sum |E_j| = 1$，超图 $H$ 只有一条边且是环，所以

$$\mu(H) = \sum |E_j| - |X| - w_H = 1 - 1 - 0 = 0$$

若 $\sum |E_j| \geqslant 2$，考察两种情况：

**情况 1**　$H$ 中有一个度为 1 的顶点 $x_1$，则由 $X - \{x_1\}$ 诱导的 $H$ 的子超图 $\overline{H}$ 满足

$$\mu(\overline{H}) = (\sum |E_j| - 1) - (n - 1) - w_H = \mu(H)$$

$\overline{H}$ 满足余树形定义中的(1′)和(2′)，故 $\overline{H}$ 是余树形的。但有 $\sum_{\overline{E} \in \overline{H}} |\overline{E}| < \sum_{E \in H} |E|$，由归纳假设，$\mu(\overline{H}) = 0$，因此 $\mu(H) = 0$。

**情况 2**　$H$ 中存在两条边 $E_1, E_2$，使 $E_1 \subset E_2$。由 Kruskal 的算法可知，部分超图 $H' = H - E_1$ 满足 $w_{H'} = w_H - |E_1|$，因而

$$\mu(H') = (\sum |E_j| - |E_1|) - n - (w_H - |E_1|) = \mu(H)$$

由于 $H'$ 满足余树形定义中的(1′)和(2′)，故 $H'$ 是余树形的。又由于 $\sum_{E' \in H'} |E'| <$

$\sum_{E\in H}|E|$，所以由归纳假设 $\mu(H')=0$，因此 $\mu(H)=0$。

由定理 13，超图 $H$ 是某一个三角剖分图的极大团超图，而三角剖分图中存在一个顶点仅含在一个极大团中（见 Graphs，第 16 章 §3）。因此情况 1 和情况 2 已穷举了所有情况。

2. 设超图 $H$ 满足 $\mu(H)=0$，对 $m(H)$ 归纳来证明 $H$ 是余树形的。

下面假设 $H$ 至少有两条边，否则结论显然成立。由性质 1，存在两条边 $E_1$ 和 $E_2$ 使得

$$\begin{aligned}0=\mu(H)&\geqslant\mu(H-E_1)+|E_1|-|E_1\cap E_2|-|E_1-\bigcup_{j\neq1}E_j|\\&\geqslant\mu(H-E_1)+|E_1|-|E_1\cap E_2|-|E_1-E_2|\\&=\mu(H-E_1)\geqslant0\end{aligned}$$

因此等号成立，特别有

(1) $\mu(H)=\mu(H-E_1)=0$

(2) $|E_1-\bigcup_{j\neq1}E_j|=|E_1-E_2|$

由(1)和归纳假设，$H-E_1$ 是三角剖分图 $G'$ 的极大团簇（当然也可能有另外非极大团）。由于(2)，故由 $G'$ 加上连结 $E_1$ 中两个顶点所得到的图 $G$ 仍是三角剖分的。因此，超图 $H$ 是余树形的。

**推论 1** 超图 $H$ 是树形的充要条件是：$\mu(H^*)=0$。

对树形超图的识别较为简单，它归结为求最大权树的问题。

**推论 2**（Lovász 不等式） 设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是余树形的超图，令

$$s=\max_{i\neq j}|E_i\cap E_j|$$

则有

(1) $\sum_{j=1}^{m}(|E_j|-s)\leqslant n-s$

事实上，不妨设 $H$ 连通，则 $L(H)$ 的权为最大的森林 $F$ 是树，且满足

$$w(F)\leqslant s(n(F)-1)=sm-s$$

从而

$$0=\mu(H)=\sum_{j=1}^{m}|E_j|-n-w(F)\geqslant\sum_{j=1}^{m}|E_j|-n-sm+s$$

因此(1)式成立。

**注** 当 $H$ 没有长度至少为 3 的圈和 $s=2$ 时，Lovász[1968] 证明了不等式(1)成立；Hansen 和 Las Vergnas 对不含长度至少是 3 的圈且 $s\geqslant2$ 的超图研究了不等式(1)。Acharya[1983] 注意到在其他许多情况下，不等式(1)亦满足。例如，图 15 所示的超图 $H$，有 $s=2$ 及

$$\sum_{j=1}^{m}(|E_j|-2)=2\leqslant n-2=4$$

因此,不等式(1) 满足。张和李[1983] 证明了:若 $H$ 不含奇圈且若每个圈中有两个顶点同时含在至少两条边中,则不等式(1) 也成立。

## 5　正规超图

若超图 $H$ 的每个部分超图 $H'$ 具有边着色性质,也就是

$$q(H') = \Delta(H') \qquad (H' \subset H)$$

则称 $H$ 是正规的。

**例 1**　平衡超图是正规的。因为平衡超图的每个部分超图也是平衡的,而由定理 9 的推论 1,每个平衡超图具有边着色性质。

但其逆不成立。例如,图 16 所示的超图是正规的,但它不是平衡的。事实上,Lovász[1972] 为了推广平衡超图的结果而引进了正规超图的概念。

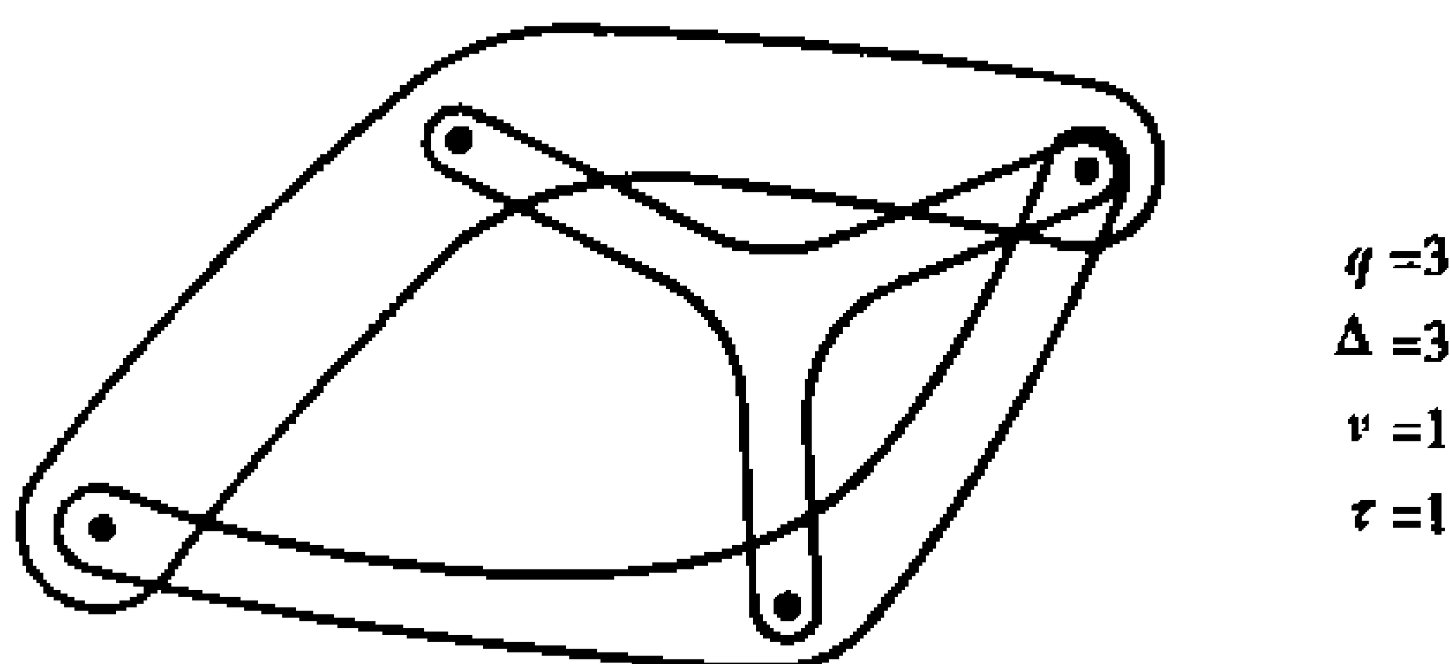



图 16　一个正规超图(非平衡的)

**例 2**(Shearer [1982])　简单连通的多米诺骨牌超图是正规的。

**定理 16**(Fournier, Las Vergnas[1972])　每个正规超图是 2- 可着色的。

**证**　事实上,正规超图不含如此的奇圈$(x_1, E_1, x_2, E_2, \cdots, E_{2k+1}, x_1)$,使得 $H' = (E_1, E_2, \cdots, E_{2k+1})$ 的最大度为2,否则有 $q(H') \geqslant 3$,这与 $H'$ 具有边着色性质相矛盾,故由定理 1 可得 $\chi(H) \leqslant 2$。

下面将建立本章的基本结果:Lovász 的定理。为此,先证明下面引理。

**引理**　设 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 是 $X$ 上的正规超图。若记 $E_{m+1} = E_1$,则超图 $H' = H + E_{m+1}$ 也是正规的。

**证**　我们只需证明 $q(H') = \Delta(H')$。

**情况 1**　$E_1$ 中含有一个顶点 $x$ 满足$d_H(x) = \Delta(H)$。在这种情况下,$\Delta(H') = \Delta(H) + 1$,所以

$$\Delta(H') \leqslant q(H') \leqslant q(H) + 1 = \Delta(H) + 1 = \Delta(H')$$

所以 $q(H') = \Delta(H')$。

**情况 2**　对 $E_1$ 中的每个顶点 $x$,$d_H(x) < \Delta(H)$。

令 $\Delta(H) = \Delta$,并给 $H$ 一个最优的 $\Delta$- 边着色:设边 $E_1$ 着 $\alpha$ 色。$H_\alpha$ 表示$H$ 中除 $E_1$ 以外其他着 $\alpha$ 色的边簇。对于满足 $d_H(x) = \Delta$ 的顶点 $x$,$x$ 必定含在某一条

不同于 $E_1$ 而着 $\alpha$ 色的边中。所以 $\Delta(H-H_\alpha)=\Delta-1$。由于 $H$ 是正规的，故有

$$q(H-H_\alpha)=\Delta(H-H_\alpha)=\Delta-1$$

因此 $H-H_\alpha$ 存在一个 $(\Delta-1)$- 边着色。现将 $H_\alpha+E_{m+1}$ 中的边着第 $\Delta$ 色，就得到 $H'$ 的 $\Delta$- 边着色。因此，

$$q(H')\leqslant\Delta=\Delta(H')\leqslant q(H')$$

故 $q(H')=\Delta(H')$。

**定理 17**(Lovász[1972])　设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是 $n$ 阶超图，$A$ 是 $H$ 的 $n\times m$ 关联矩阵，则下列陈述是等价的：

(1) $H$ 是正规的

(2) 匹配多面体 $Q=\{\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^m,\boldsymbol{y}\geqslant\mathbf{0},A\boldsymbol{y}\leqslant\mathbf{1}\}$ 的每个极点均是(0,1)- 矢量

(3) 匹配多面体的每个极点均是整点

(4) $N\max\limits_{y\in Q(1)}\langle\boldsymbol{d},\boldsymbol{y}\rangle=N\operatorname{-min}\limits_{t\in P(d)}\langle\mathbf{1},\boldsymbol{t}\rangle\qquad(\forall\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^m)$

(5) 每个部分超图 $H'\subset H$ 具有 König 性质

**证**　(1)⇒(2)。令 $z$ 是 $Q$ 的一个极点。由于 $z$ 是线性整系数方程组的一个解，故 $z$ 的每个分量是有理数，因此存在整数 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 和 $k\geqslant0$，使 $kz=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$。

现将 $H$ 中的每条边 $E_j$ 重复 $p_j$ 次，所得超图记为 $H'$。由引理知，$H'$ 是正规的。而且对 $x_i\in X$，有

$$d_{H'}(x_i)=\sum_{j\mid x_i\in E_j}p_j=\langle\boldsymbol{a}^i,k\boldsymbol{z}\rangle=k\langle\boldsymbol{a}^i,\boldsymbol{z}\rangle\leqslant k$$

因此，$q(H')=\Delta(H')\leqslant k$。考虑 $H'$ 的 $k$- 边着色。令其颜色为 $1,2,\cdots,k$。又令

$$y_j(\alpha)=\begin{cases}1 & \text{存在 } E_j \text{ 的一个拷贝着 } \alpha \text{ 色}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

矢量 $\boldsymbol{y}(\alpha)=(y_1(\alpha),y_2(\alpha),\cdots,y_m(\alpha))$ 是 $Q$ 中的(0,1)- 矢量。而且

$$z=\frac{1}{k}(p_1,p_2,\cdots,p_m)=\frac{1}{k}\sum_{\alpha=1}^{k}\boldsymbol{y}(\alpha)$$

因为 $z$ 是多面体 $Q$ 的极点和 $\boldsymbol{y}(\alpha)\in Q$，从而推得 $\boldsymbol{y}(1)=\boldsymbol{y}(2)=\cdots=\boldsymbol{y}(k)$。因为 $z=\boldsymbol{y}(1)$，即 $z$ 是(0,1)- 矢量。故(2)成立。

(2)⇒(3)。显然。

(3)⇒(4)。对于 $\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^m$，考虑

$$\bar{Q}=\{z\mid z\in Q(\mathbf{1}),z\in\mathbf{N}^m,\langle\boldsymbol{d},z\rangle=\max_{y\in Q(1)}\langle\boldsymbol{d},\boldsymbol{y}\rangle\}$$

由(3)，$\bar{Q}\neq\varnothing$，所以 $\bar{Q}$ 落在 $Q(1)$ 的一个面上。故存在矩阵 $A$ 的一个行矢量 $\boldsymbol{a}^{i_1}$ 满足

$$\langle\boldsymbol{a}^{i_1},z\rangle=1\qquad(z\in\bar{Q})$$

换句话说，在 $H$ 中有一个最大 $\boldsymbol{d}$- 匹配覆盖 $x_{i_1}$。令

$$d_j^1 = \begin{cases} d_j - 1 & \text{若 } E_j \text{ 含 } x_{i_1} \text{ 且在最优匹配中} \\ d_j & \text{其他} \end{cases}$$

则 $\boldsymbol{d}^1 = (d_1^1, d_2^1, \cdots, d_m^1) \geqslant 0$ 和 $N_{\text{-max}}\langle \boldsymbol{d}^1, \boldsymbol{y}\rangle = N_{\text{-max}}\langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{y}\rangle - 1$。类似地，存在矢量 $\boldsymbol{d}^2 \geqslant \boldsymbol{0}$，满足 $N_{\text{-max}}\langle \boldsymbol{d}^2, \boldsymbol{y}\rangle = N_{\text{-max}}\langle \boldsymbol{d}^1, \boldsymbol{y}\rangle - 1$。继续这一过程，直到出现 $\boldsymbol{d}^k$ 使得 $N_{\text{-max}}\langle \boldsymbol{d}^k, \boldsymbol{y}\rangle = 0$ 为止。于是可确定一个序列 $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k})$，在这序列中，设 $x_1$ 出现 $t_1$ 次，$x_2$ 出现 $t_2$ 次等等。

显然，矢量 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 是 $H$ 的一个 $\boldsymbol{d}$- 横贯，且有

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = k = N_{\substack{\text{-max} \\ y \in Q(1)}}\langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{y}\rangle$$

由线性规划的对偶定理，$\boldsymbol{t}$ 是最小 $\boldsymbol{d}$- 横贯，故有

$$N_{\substack{\text{-max} \\ y \in Q(1)}}\langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} t_i = N_{\substack{\text{-min} \\ t \in P(d)}}\langle \boldsymbol{1}, \boldsymbol{t}\rangle$$

故(4) 成立。

(4)⇒(5)。设 $H' \subset H$ 是 $H$ 的部分超图。令

$$d_j = \begin{cases} 1 & \text{若 } E_j \in H' \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

则矢量 $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_m)$ 满足

$$N_{\substack{\text{-max} \\ y \in Q(1)}}\langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{y}\rangle = \nu(H')$$
$$N_{\substack{\text{-min} \\ t \in P(d)}}\langle \boldsymbol{1}, \boldsymbol{t}\rangle = \tau(H')$$

于是由(4) 可得 $\nu(H') = \tau(H')$，即 $H'$ 具有 König 性质。

(5)⇒(1)。设 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 是 $X$ 上满足(5) 的一个超图。令 $\overline{H} = (\overline{E}_1, \overline{E}_2, \cdots, \overline{E}_m)$ 是以 $H$ 的极大匹配[①]作为顶点的超图，其中 $\overline{E}_j$ 是 $H$ 中所有含 $E_j$ 的极大匹配全体。显然，$\overline{E}_j \cap \overline{E}_k = \varnothing$ 当且仅当 $E_j \cap E_k \neq \varnothing$。

由(5)，$H$ 具有 Helly 性质，故有

$$\nu(\overline{H}) = \Delta(H)$$
$$q(\overline{H}) = \tau(H)$$

而且

$$\tau(\overline{H}) = q(H)$$
$$\Delta(\overline{H}) = \nu(H)$$

由于 $H$ 具有 König 性质，故可得 $q(\overline{H}) = (\Delta\overline{H})$。同理，$\overline{H}$ 的每个部分超图具有边着色性质。而上述已证得(1) 蕴含(5)，故 $\nu(\overline{H}) = \tau(\overline{H})$，即 $q(H) = \Delta(H)$。因此(1) 成立。

**推论 1**　超图 $H$ 是正规的充要条件是：$H$ 具有 Helly 性质，且 $L(H)$ 是一个完

---

① 原文为匹配。

美图。

**证** 若 $H$ 是正规的，则 $H$ 具有 Helly 性质。由(5)，一个交簇 $H'$ 满足 $\tau(H') = \nu(H') = 1$。此外，由于 $q(H) = \Delta(H)$，故有 $\gamma(H^*) = r(H^*)$，并且 2- 截口 $G = [H^*]_2$ 满足 $\gamma(G) = \omega(G)$。类似地，对于 $G$ 的每个诱导子图，这一等式仍成立。故图 $G$ 是完美图(见 Graphs，第 16 章，§3)。

反之，若 $H$ 具有 Helly 性质及 $G = L(H)$，则 $H^*$ 的最大边是 $G$ 的最大团(第 1 章，§8，性质 1)。若 $G$ 是完美的，则 $\gamma(G) = \omega(G)$，因而 $\gamma(H^*) = r(H^*)$ 及 $q(H) = \Delta(H)$。同理，对每个 $H' \subset H$，这等式也成立。故 $H$ 是正规超图。

注意到若超图 $H$ 不具有 Helly 性质，一般地，$H$ 就未必是正规的(例如，第 1 章中图 8 所示的超图 $H_2$)。

**推论 2** 每个树形超图[①]是正规的。

事实上，若 $H$ 是树形超图，则由定理 13 的推论知，$H$ 具有 Helly 性质，而 $L(H)$ 是三角剖分图。由于每个三角剖分图是完美的(见 Graphs，第 16 章，§3)，再根据推论 1 可知，$H$ 是正规的。

# 6 Mengerian 超图

超图 $H$ 称为是 **Menger** 的，如果 $H$ 满足

(1) $N_{\substack{\max \\ y \in Q(c)}} \langle 1, y \rangle = N_{\substack{\min \\ t \in P(1)}} \langle c, t \rangle \qquad (\forall c \in \mathbf{N}^n)$

由定理 11，每个平衡超图是 Menger 的。反之不真。例如，图 17 所示的超图是 Menger 的超图，但其色数大于 2。

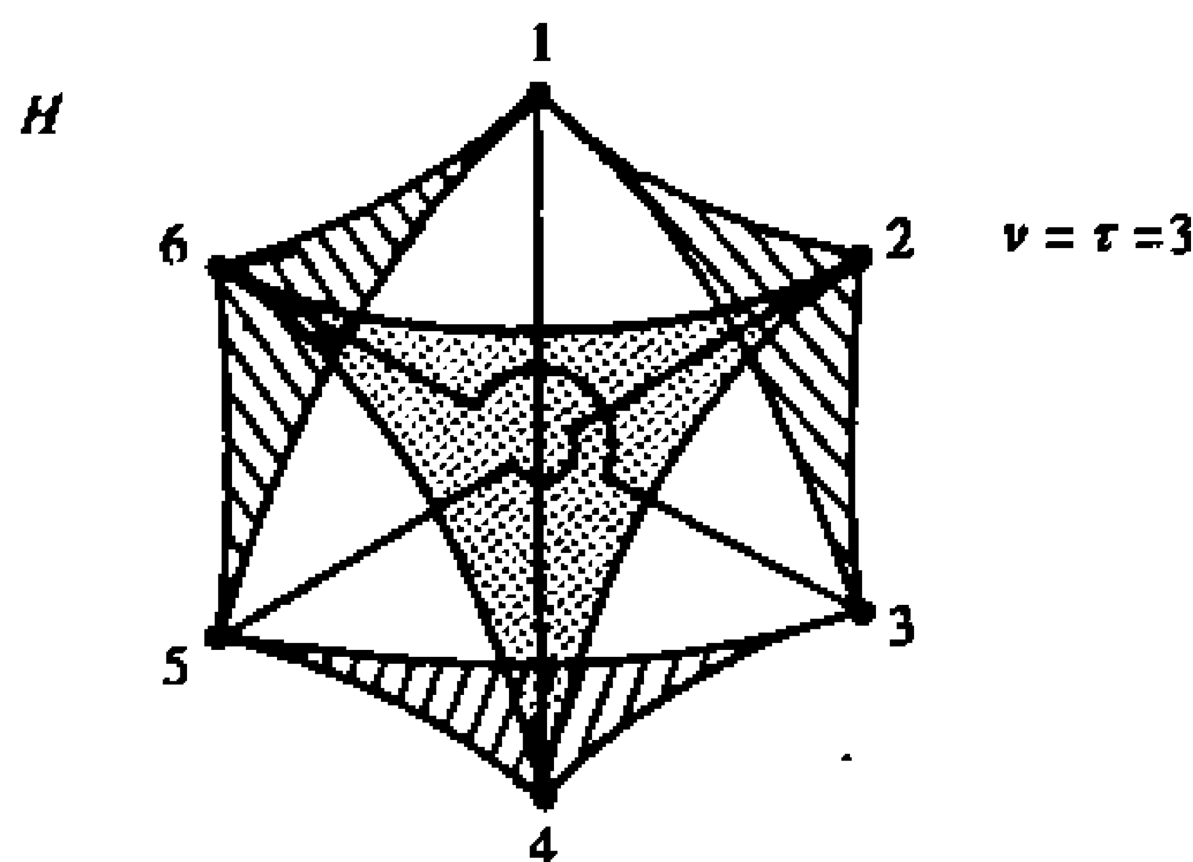



**图 17 非 2- 可着色的 Mengerian 超图**

**性质 1** 设 $H$ 是一个 Menger 的超图，$A$ 是至少含一条边的一个点集，则部分超图 $H|A = (E_i | E_i \subset A)$ 是 Menger 的。

**证** 对于 $H|A$ 中的每个顶点 $x_i$ 定义一个整数 $c_i \geq 0$，令

---

① 原文为余树形超图。

$$\bar{c}_i = \begin{cases} c_i & 若\ x_i\ 是 H|A\ 的顶点 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

$\bar{P}$ 和 $\bar{Q}$ 是对应于超图 $H|A$ 的两个多面体，则有

(1) $N \max_{y \in \bar{Q}(c)} \langle \mathbf{1}, \boldsymbol{y} \rangle = N \max_{y \in \bar{Q}(c)} \langle \mathbf{1}, \boldsymbol{y} \rangle$

(2) $N \min_{t \in \bar{P}(1)} \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{t} \rangle = N \min_{y \in \bar{P}(1)} \langle \bar{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{t} \rangle$

由于 $H$ 是 Menger 的，(1) 和(2) 中右边两个数相等。所以 $H|A$ 是 Menger 的。

**性质 2**　设 $H$ 是 Menger 的超图，$A$ 是与每条边均相交的点集，则诱导子图 $H_A = (E_i \cap A \mid i \leqslant m, E_i \cap A \neq \varnothing)$ 是 Menger 的。

**证**　对每个顶点 $x_i \in A$ 定义一个数 $c_i \geqslant 0$，令

$$\bar{c}_i = \begin{cases} c_i & 若\ x_i \in A \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

$\bar{P}$ 和 $\bar{Q}$ 是对应于超图 $H|A$ 的两个多面体，则有

(1) $N \max_{y \in Q(c)} \langle \mathbf{1}, \boldsymbol{y} \rangle = N \max_{y \in Q(c)} \langle \mathbf{1}, \boldsymbol{y} \rangle$

(2) $N \min_{t \in P(1)} \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{t} \rangle = N \min_{t \in \bar{P}(1)} \langle \bar{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{t} \rangle$

由于 $H$ 是 Menger 的，(1) 和(2) 中右边两个数相等。因此超图 $H_A$ 是 Menger 的。

设 $H$ 是一个超图，令 $\lambda \geqslant 0$ 是一个整数，$x$ 是 $H$ 中的一个顶点，称 **$x$ 扩张 $\lambda$ 次**即用 $\lambda$ 个新顶点 $x^1, x^2, \cdots, x^\lambda$ 代替 $x$，$H$ 中每一条含 $x$ 的边 $E$ 由 $\lambda$ 条新的边 $E^1 = (E - \{x\}) \cup \{x^1\}, E^2 = (E - \{x\}) \cup \{x^2\}, \cdots, E^\lambda = (E - \{x\}) \cup \{x^\lambda\}$ 来代替。$x$ 扩张 $\lambda = 0$ 次即在 $H$ 中删去 $x$，并将 $H$ 中所有含 $x$ 的边 $E$ 用 $E - \{x\}$ 来代替。

令 $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是一个非负整矢量。用 $\boldsymbol{c}$ 对超图 $H$ 的扩张即依次对 $x_1$ 扩张 $c_1$ 次，$x_2$ 扩张 $c_2$ 次等。最后得到的超图记为 $H^c$。

**定理 18**　$H$ 是 $m$ 条边、$n$ 个顶点的超图。令 $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n) \in \mathbf{N}^n$，$k \geqslant 1$ 是整数，则

(1) $\nu_k(H^c) = \max\{\langle \mathbf{1}, \boldsymbol{y} \rangle \mid \boldsymbol{y} \in \mathbf{N}^m, A\boldsymbol{y} \leqslant k\boldsymbol{c}\}$

(2) $\tau_k(H^c) = \min\{\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{t} \rangle \mid \boldsymbol{t} \in \mathbf{N}^n, A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t} \geqslant k\mathbf{1}\}$

(3) $\tau^*(H^c) = \max_{y \in Q(c)} \langle \mathbf{1}, \boldsymbol{y} \rangle = \min_{t \in P(1)} \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{t} \rangle$

**证**　对(1) 和(2)，只需证明当 $\boldsymbol{c} = (0, 1, 1, \cdots, 1)$ 或 $\boldsymbol{c} = (2, 1, \cdots, 1)$ 时成立即可。

(1) 若 $\boldsymbol{c} = (0, 1, \cdots, 1)$。考虑 $H$ 的一个使得 $\sum \bar{y}_i$ 最大的 $k\boldsymbol{c}$- 匹配 $\bar{\boldsymbol{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_m)$。由于当 $x_1 \in E_j$ 时，就有 $\bar{y}_j = 0$，故 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 是 $H^c$ 的一个值为 $\sum \bar{y}_j$ 的 $k$- 匹配，因此，

$$\nu_k(H^c) \geqslant \sum_{j\geqslant 1} \bar{y}_j = \max\{\langle \mathbf{1}, \boldsymbol{y}\rangle \mid \boldsymbol{y} \in \mathbf{N}^m, A\boldsymbol{y} \leqslant k\boldsymbol{c}\}$$

另外，$H^c$ 中的一个使 $\sum y_j$ 最大的$k$-匹配$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$确定了 $H$ 中的一个值为 $\sum y_j$ 的$kc$-匹配，故有

$$\max\{\langle \mathbf{1}, \boldsymbol{y}\rangle \mid \boldsymbol{y} \in \mathbf{N}^m, A\boldsymbol{y} \leqslant k\boldsymbol{c}\} \geqslant \sum y_j = \nu_k(H^c)$$

故由以上两个不等式，(1) 成立。

若 $\boldsymbol{c} = (2,1,\cdots,1)$。令 $\bar{\boldsymbol{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_m)$是 $H$ 上值最大的一个$kc$-匹配。在 $H^c$ 中，有两个顶点 $x'_1$ 和 $x''_1$ 对应于 $H$ 中顶点 $x_1$。$H$ 中含 $x_1$ 的边的集合 $\{E_j \mid j \in J\}$对应$H^c$ 中两个边集合$\{E'_j \mid j \in J\}$和$\{E''_j \mid j \in J\}$，则有

$$\sum_{j\in J} \bar{y}_j \leqslant 2k$$

考察矢量

$$\boldsymbol{y} = (\bar{y}_j \mid j \in \{1,2,\cdots,m\} - J) \cup (y'_j \mid j \in J) \cup (y''_j \mid j \in J)$$

这里

$$y'_j + y''_j = \bar{y}_j \qquad (j \in J)$$

$$\sum_{j\in J} y'_j \leqslant k$$

$$\sum_{j\in J} y''_j \leqslant k$$

这矢量是 $H^c$ 的一个$k$-匹配，则有

$$\nu_k(H^c) \geqslant \sum y_i = \sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j = \max\{\langle \mathbf{1}, \boldsymbol{y}\rangle \mid \boldsymbol{y} \in \mathbf{N}^m, A\boldsymbol{y} \leqslant k\boldsymbol{c}\}$$

因此(1) 成立。

(2) 若 $\boldsymbol{c} = (0,1,1,\cdots,1)$。考虑 $H$ 的一个具有最小$c$-值$\sum_{i\neq 1} t_i$ 的$k$-横贯$(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，则矢量$(t_2, t_3, \cdots, t_n)$是 $H^c$ 的$k$-横贯。故有

$$\tau_k(H^c) \leqslant \sum_{i\neq 1} t_i = \min\{\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{t}\rangle \mid \boldsymbol{t} \in \mathbf{N}^n, A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t} \geqslant k\mathbf{1}\}$$

反之，若$(t_2, t_3, \cdots, t_n)$是 $H^c$ 的最小$k$-横贯，则矢量$(k, t_2, t_3, \cdots, t_n)$是 $H$ 的$k$-横贯，因此，

$$\min\{\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{t}\rangle \mid \boldsymbol{t} \in \mathbf{N}^n, A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t} \geqslant k\mathbf{1}\} \leqslant \sum_{i\neq 1} t_i = \tau_k(H^c)$$

故由以上两式，知(2) 成立。

若 $\boldsymbol{c} = (2,1,1,\cdots,1)$。考虑 $H$ 的一个最小$c$-值为$2t_1 + t_2 + \cdots + t_n$ 的最优$k$-横贯$(t_1, t_2, \cdots, t_n)$。由于$(t_1, t_1, t_2, t_3, \cdots, t_n)$是 $H^c$ 的一个$k$-横贯，故有

$$\tau_k(H^c) \leqslant 2t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \min\{\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{t}\rangle \mid \boldsymbol{t} \in \mathbf{N}^n, A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t} \geqslant k\mathbf{1}\}$$

反之，若$(t_1, t'_1, t_2, \cdots, t_n)$是 $H^c$ 的最小$k$-横贯，则有 $t'_1 = t_1$。因为矢量$(t_1, t_2,$

$\cdots,t_n$) 是 $H$ 的 $k$- 横贯，故有

$$\min\{\langle c,t\rangle \mid t\in \mathbf{N}^n, A^{\mathrm{T}}t\geqslant k\mathbf{1}\}\leqslant 2t_1+t_2+\cdots+t_n=\tau_k(H^c)$$

由以上两不等式，知(2) 式成立。

(3) 在$\frac{1}{k}\tau_k(H^c)$ 及$\frac{1}{k}\nu_k(H^c)$ 中，令 $k\to+\infty$，就得到 $\tau^*(H^c)$。则由(1) 和(2) 可推得(3) 成立。

**推论**　设 $\mathscr{H}$ 是具有 König 性质且满足

$$H\in\mathscr{H}, c\in \mathbf{N}^{n(H)}\Rightarrow H^c\in\mathscr{H}$$

的超图簇，则 $\mathscr{H}$ 中的每个超图是 Menger 的。

**证**　显然。

**例 1**(Menger)　$G$ 是一个多重图，$a,b$ 是 $G$ 的两个顶点。$H$ 表示以 $G$ 的边为顶点，从 $a$ 到 $b$ 的路为边所构成的超图，则 $H$ 的横贯是 $G$ 的反圈 $\omega(S)$，其中 $a\in S$，$b\in X-S$。

Menger 的定理蕴含了 $H$ 具有 König 性质。此外，$H$ 的顶点扩张 $\lambda$ 次等价于将 $G$ 中对应的边用 $\lambda$ 条重边代替。因此 $H$ 是 Mengerian 超图。

**例 2**(Menger)　$G$ 是一个简单图，$a,b$ 是 $G$ 中两个不相邻的顶点。$H$ 表示以 $G$ 中异于 $a,b$ 的顶点为顶点，从 $a$ 到 $b$ 的路的内点集为边所构成的超图，则 $H$ 的最小横贯就是 $G$ 中分离 $a$ 和 $b$ 的最小割集。由 Menger 的第二定理知，$H$ 具有 König 性质。且 $H$ 的顶点 $x$ 扩张 $\lambda$ 次等价于在 $G$ 中，用基数为 $\lambda$ 的独立集代替 $x$，而与 $x$ 相邻的顶点与这些顶点均相邻。因此 $H$ 是 Mengerian 超图。

**例 3**(Edmonds[1970])　$G$ 是 $X$ 上的多重图，$S$ 是 $X$ 中至少有两个顶点的子集，$H$ 表示以 $G$ 的边为顶点，形如 $\mu=[s_1,a_1,a_2,\cdots,a_k,s_2]$ 的路为边所构成的超图，这里 $s_1,s_2\in S$，$a_1,a_2,\cdots,a_k\in X-S$。Edmonds 的定理证明了 $H$ 具有 König 性质。注意到由于扩张 $H$ 的顶点等价于 $G$ 的相应的边用多重边代替，所以 $H$ 是 Mengerian 超图。

**例 4**(Edmonds[1973])　$G=(X,U)$ 是一个连通有向图，$a$ 为 $G$ 中所有其他顶点的“祖先”，即为 $G$ 的“根”。$H$ 是以 $G$ 的弧为顶点，以 $a$ 为根且含 $G$ 的所有顶点的树形图为边所构成的超图。

$H$ 的横贯是 $\omega^+(S)=\{(S,X-S)\mid S\subset X, S\neq X\}$。Edmonds 的定理蕴含着 $H$ 具有 König 性质。注意到 $H$ 的顶点扩张 $\lambda=0$ 次等价于在 $G$ 中删去相应的弧，扩张 $\lambda>0$ 次等价于在 $G$ 中将相应的弧用重数为 $\lambda$ 的重弧代替。因此 $H$ 是 Mengerian 超图。

Frank[1979] 用有根森林图代替有根树形图，将上述例子作了推广。

**例 5**　设 $G=(X,U)$ 是有向图，$H$ 表示以 $G$ 的弧为顶点，$G$ 中的反圈为边所构成的超图。Lucchesi 和 Younger[1978] 的定理证明了 $H$ 具有 König 性质。注意到

$H$ 的顶点扩张 $\lambda=0$ 次等价于将 $G$ 中相应的弧收缩掉。扩张 $\lambda>0$ 次等价于用一条长为 $\lambda$ 的有向路代替相应弧。因此 $H$ 是 Mengerian 超图。

更多的例子可见 Woodall[1978],Seymour[1977],Maurras[1976]。其方法仍采取证明这些超图具有 König 性质。一个更为一般的方法由 Lovász[1976] 给出,Schrijver 和 Seymour[1979] 给予了进一步推广。

引理 1(Hoffman[1974]) $A=(a_{ij})_{n\times m}$ 是矩阵,$a_{ij}\in\mathbf{N}$,$k\geqslant 1$ 是一个整数。若凸多面体

$$P=\{x\mid x\in\mathbf{R}^n,x\geqslant\mathbf{0},A^{\mathrm{T}}x\geqslant\mathbf{1}\}$$

使得对每个 $c\in\mathbf{N}^n$,$k\min\limits_{x\in P}\langle c,x\rangle$ 是整数,则 $P$ 的极点的坐标是 $\frac{1}{k}$ 的倍数。

证 设 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是 $P$ 的一个极点,下面将证明 $y_1$ 是 $\frac{1}{k}$ 的倍数。令 $e_1=(1,0,\cdots,0)$。下面将证明存在一个矢量 $c\in\mathbf{N}^n$ 满足

(1) $\langle c,y\rangle=\min\limits_{x\in P}\langle c,x\rangle$

(2) $\langle c+e_1,y\rangle=\min\limits_{x\in P}\langle c+e_1,x\rangle$

为此,令 $I=\{i\mid y_i=0\}$,$J=\{j\mid\langle a_j,y\rangle=1\}$ 和矢量 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$,这里

$$d_i=\begin{cases}\sum\limits_{j\in J}a_{ij}+1 & 若\ i\in I\\ \sum\limits_{j\in J}a_{ij} & 若\ i\notin I\end{cases}$$

则对每个矢量 $x\in P$ 有

$$\langle d,x\rangle=\sum_i d_ix_i=\sum_{i\in I}x_i+\sum_{j\in J}\langle a_j,x\rangle\geqslant|J|$$

而当 $x=y$ 时等号成立。故有

$$\langle d,y\rangle=\min_{x\in P}\langle d,x\rangle$$

此外,由超平面簇 $\{x\mid x_i=0\}$ $(i\in I)$ 和超平面簇 $\{x\mid\langle a_j,x\rangle=1\}$ $(j\in J)$ 完全确定了极点 $y$。故还有

(3) $\langle d,x\rangle>\langle d,y\rangle\qquad(x\neq y,x\in P)$

假设对每个整数 $\lambda\geqslant 1$,对 $x\in P$,$\langle\lambda d+e_1,x\rangle$ 的极小值在极点 $z(\lambda)\neq y$ 达到:因为 $P$ 的极点仅有有限个,故必存在极点 $\bar{x}$ 使得存在无限多个 $\lambda$ 成立 $\bar{x}=z(\lambda)$,即有无限多个 $\lambda$ 满足

$$\langle d,\bar{x}\rangle+\frac{1}{\lambda}\bar{x}_1\leqslant\langle d,y\rangle+\frac{1}{\lambda}y_1$$

因此有 $\bar{x}\neq y$,$\bar{x}\in P$ 且满足 $\langle d,\bar{x}\rangle\leqslant\langle d,y\rangle$,这与(3)矛盾。因此,对某些 $\lambda\geqslant 1$,$\langle\lambda d+e_1,x\rangle$ 的最小值在 $y$ 达到。由于 $\langle\lambda d,x\rangle$ 的最小值也在 $y$ 达到,故矢量 $c=\lambda d$

必须满足(1)和(2)。于是从(1)和(2)可得 $y_1 = \langle c+e_1, y\rangle - \langle c, y\rangle$ 是 $\frac{1}{k}$ 的倍数。

同理可证其他坐标也是 $\frac{1}{k}$ 的倍数。

**引理2** 设 $H$ 是 $n$ 阶超图，$k \geqslant 1$ 是整数。下述条件等价：

(1) 对每个 $c \in \mathbf{N}^n$，$k\tau^*(H^c)$ 是整数；

(2) 对每个 $c \in \mathbf{N}^n$，$\tau^*(H^c) = \frac{1}{k}\tau_k(H^c)$。

**证** 只需证(1)⇒(2)成立。

设 $A$ 是 $H$ 的关联矩阵，多面体

$$P = \{x \mid x \in \mathbf{R}^n, x \geqslant \mathbf{0}, A^{\mathrm{T}}x \geqslant \mathbf{1}\}$$

满足引理1的条件。因此 $P$ 的每个极点的坐标均是 $\frac{1}{k}$ 的倍数。特别地，达到 $\langle c, x\rangle$ 的最小值的极点可表示为 $x_0 = \frac{1}{k}t_0$，$t_0 = (t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \mathbf{N}^n$。由于 $A^{\mathrm{T}}x_0 \geqslant \mathbf{1}$，故 $t_0$ 是 $H$ 的极小 $c$-值 $k$-横贯。因此，

$$\frac{1}{k}\min\{\langle c, t\rangle \mid t \in \mathbf{N}^n, A^{\mathrm{T}}t \geqslant k\mathbf{1}\} = \frac{1}{k}\langle c, t_0\rangle = \min_{x \in P(1)}\langle c, x\rangle$$

由定理18即可得(2)成立。

**引理3** 设 $H$ 是 $n$ 阶超图，$k \geqslant 1$ 是整数，则下述条件等价：

(3) 对每个 $c \in \mathbf{N}^n$，$\frac{1}{k}\nu_k(H^c) = \tau^*(H^c)$；

(4) 对每个 $c \in \mathbf{N}^n$，$\nu_k(H^c) = \tau_k(H^c)$。

只需证明(3)⇒(4)。事实上，(3)蕴含了引理2中的(1)。因此(2)成立。进而有(2)和(3)蕴含着(4)。

**定理19**(Lovász [1976]) $n$ 阶超图 $H$ 是Menger的充要条件是：对整数 $k \geqslant 0$，有

(5) $\frac{1}{k}\nu_k(H^c) = \nu(H^c) \quad (\forall c \in \mathbf{N}^n)$

**证** 假设对每个 $c \in \mathbf{N}^n$，(5)式成立，即

$$\min\{\langle \mathbf{1}, y\rangle \mid y \in \mathbf{N}^m, Ay \leqslant kc\} = k\min\{\langle \mathbf{1}, y\rangle \mid y \in \mathbf{N}^m, Ay \leqslant c\}$$

令 $c = kc'$，上式可改写为

$$\min\{\langle \mathbf{1}, y\rangle \mid y \in \mathbf{N}^m, Ay \leqslant k^2c'\} = k\min\{\langle \mathbf{1}, y\rangle \mid y \in \mathbf{N}^m, Ay \leqslant kc'\}$$

因此，对每个 $c \in \mathbf{N}^n$，有

$$\frac{1}{k^2}\nu_{k^2}(H^c) = \frac{1}{k}\nu_k(H^c) = \nu(H^c)$$

由第3章中的定理1，可得

$$\tau^*(H^c)=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{k^s}\nu_{k^s}(H^c)=\nu(H^c)$$

再在引理 2 中取 $k=1$,就有 $\nu(H^c)=\tau(H^c)$。因此 $H$ 是 Menger 超图。

设 $H$ 是 $n$ 阶超图,$x_1$ 是 $H$ 中的一个顶点,$\lambda\geqslant 0$ 是整数。$x_1$ 被倍增 $\lambda$ 次是指用 $\lambda$ 个新顶点集 $X_1=\{x_1^1,x_1^2,\cdots,x_1^\lambda\}$ 代替 $x_1$,并把每一条含 $x_1$ 的边 $E$ 用 $\overline{E}=(E-\{x_1\})\cup X_1$ 来替代。$x_1$ 被倍增 $\lambda=0$ 次所得超图是指 $H$ 关于 $X-\{x_1\}$ 的导出子图。

令 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in\mathbf{N}^n$。若在 $H$ 中,将 $x_1$ 被倍增 $c_1$ 次,$x_2$ 被倍增 $c_2$ 次等等,所得的超图记为 $\overline{H}^{(c)}$,称为 $H$ 关于 $c$ 被倍增。

注　如果 $H$ 是平衡的,则 $\overline{H}^{(c)}$ 也是平衡的。事实上,若 $c=(0,1,1,\cdots,1)$ 时,超图 $\overline{H}^{(c)}$ 就是 $H$ 的子超图,由 §3 的性质 1,$\overline{H}^{(c)}$ 是平衡的。若 $c=(2,1,1,\cdots,1)$ 时,$\overline{H}^{(c)}$ 是 $H$ 中用 $\{x_1^1,x_1^2\}$ 代替顶点 $x_1$ 所得的超图。由于 $H$ 是平衡的,故仅需考察如下奇圈 $(a_1,\overline{E}_1,a_2,\overline{E}_2,\cdots,a_1)$,$x_1^1$ 和 $x_1^2$ 同时是这个圈上的两个顶点。这个圈中与 $x_1^1$ 相邻的两条边也一定含 $x_1^2$,故这两条边之一必含这个圈中的三个顶点。故 $\overline{H}^{(c)}$ 也是平衡的。

但是,$H$ 是平衡的,而 $H^c$ 未必是平衡的。例如,考察图 12 所示的平衡超图 $H$,把顶点 $f_1$ 扩张 2 次,对应的两个顶点为 $f'_1$ 和 $f''_1$,则下述奇圈

$$(f''_1,\{f''_1,f_4\},f_4,\{f'_1,f_2,f_3,f_4\},f_2,\{f''_1,f_2\},f''_1)$$

中没有一条边含圈中的三个顶点。

下面将研究横贯超图是 Mengerian 超图的条件。用 $\sigma(H)$ 表示对 $H$ 的顶点着色,使得每条边含所有颜色的最大颜色数。显然有

$$\sigma(H)\leqslant\min_j|E_j|=s(H)$$

若对每个 $c\in\mathbf{N}^n$,均有 $\sigma(\overline{H}^{(c)})=s(\overline{H}^{(c)})$,就称 $H$ 具有 **Gupta 性质**。由 Gupta 的定理[1978]可证明 2- 部图的对偶超图具有 Gupta 性质。

引理　$H$ 是一个 $n$ 阶简单超图,$K=T_rH$ 是 $H$ 的横贯超图,则 $K$ 是 Menger 的充要条件是:$H$ 具有 Gupta 性质。

证　对于 $c\in\mathbf{N}^n$,易得

(1) $T_r\overline{H}^{(c)}=(T_rH)^c$

而且对每个超图 $H$,有

(2) $\sigma(H)=\nu(T_rH)$

(3) $s(H)=\tau(T_rH)$

由(1),(2)和(3),可得

$$\sigma(\overline{H}^{(c)})=\nu(T_r\overline{H}^{(c)})=\nu[(T_rH)^c]$$

$$s(\overline{H}^{(c)})=\tau(T_r\overline{H}^{(c)})=\tau[(T_rH)^c]$$

故 $H$ 具有 Gupta 性质的充要条件是：上述两式相等，即 $K = T_rH$ 是 Menger 的。

**定理 20**（Berge[1984]） $H$ 是简单平衡超图，则 $T_rH$ 是 Mengerian 超图。

**证** 若 $H$ 是平衡的，则对每个 $c \in \mathbf{N}^n$，$\overline{H}^{(c)}$ 也是平衡的。因此由定理 9 的推论 2，有 $\sigma(\overline{H}^{(c)}) = s(\overline{H}^{(c)})$。则由上述引理，$T_rH$ 是 Mengerian 超图。

**注** 定理 20 之逆定理不成立。例如，设 $H$ 是 $K_4$ 的对偶超图（图 19），则 $T_rH$ 是图 17 所示的 Mengerian 超图，但 $H$ 不是平衡超图。尽管如此，仍有如下结果：若对每个 $H' \subset H$，$T_rH'$ 是 Menger 的，则对于每个 $H' \subset H$，$H'$ 具有 Gupta 性质。从而 $H$ 是平衡的。

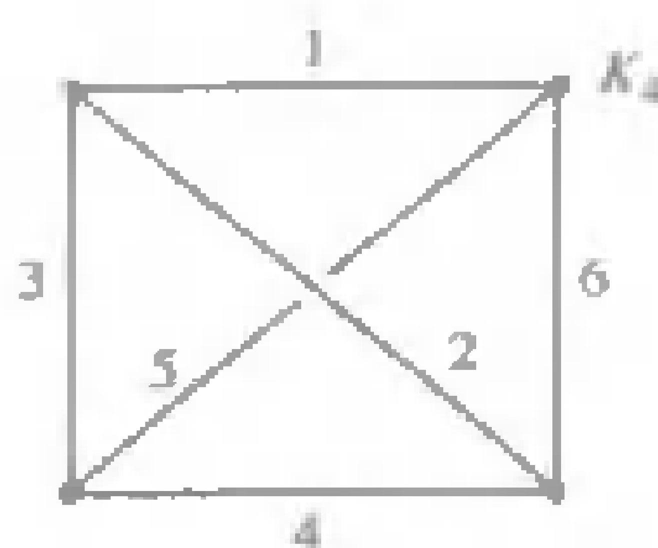



图 18

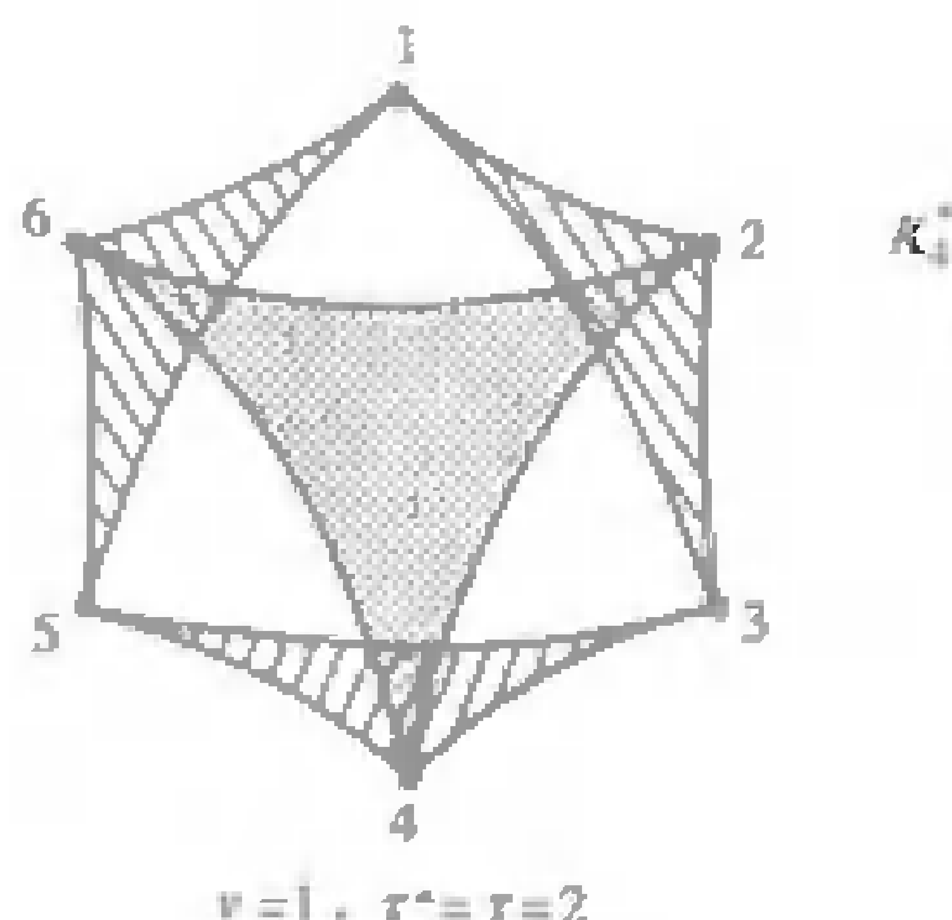



图 19 准正规而非 Mengerian 超图

# 7 准正规超图

下面推广 Mengerian 超图的概念。易知下述各命题等价：

(1) 多面体 $P = \{t \mid t \in \mathbf{R}^n, t \geqslant 0, A^{\mathrm{T}}t \geqslant 1\}$ 的极点是整点；

(2) 对每个 $c \in \mathbf{N}^n$，$\min\limits_{t \in P(1)} \langle c, t\rangle$ 是整数；

(3) 对每个 $c \in \mathbf{N}^n$，$N_{\min\limits_{t\in P(1)}} \langle c, t\rangle = \min\limits_{t \in P(1)} \langle c, t\rangle$。

在引理 1 中取 $k = 1$ 时，可得到(1)与(2)等价。在引理 2 中取 $k = 1$ 时，可得(2)与(3)等价。若一个超图 $H$ 满足(1)或(2)或(3)，就称 $H$ 是**准正规的**。这类超图首先由 Fulkerson 研究，Schrijver 把这类超图称为 Fulkersonian 超图"。Seymour 把它称为"具有弱最大流、最小割性质"的超图。

若超图 $H$ 是 Menger 的，则 $H$ 满足(3)，因此 $H$ 是准正规的。但其逆不成立。如图 19 所示，$K_4$ 的对偶超图 $K_4^*$ 是准正规的，但由于 $\nu(K_4^*) \neq \tau(K_4^*)$，故不是 Menger 的。

Seymour[1971]猜测，若简单准正规超图 $H$ 中不含以 $K_4^*$ 为 $H|A$ -

$(E_i | E_i \in H, E_i \subset A)$ 或 $H_A(A \subset X)$ 这两类诱导子超图，则 $H$ 是 Menger 的。

下面给出几个准正规超图的例子。

**例 1**(Seymour[1977]) $G$ 是一个平面图，$H(G)$ 是以 $G$ 的边为顶点，$G$ 的奇圈为边所构成的超图，则 Seymour 证明了 $H(G)$ 是准正规超图。但是，对于非平面图 $G = K_5$，$H(K_5)$ 不是准正规的。

**例 2**(Hu[1963]) $G$ 是一个图，$s, s', t, t'$ 是 $G$ 的四个顶点，令 $H(G)$ 表示以 $G$ 的边为顶点，$G$ 中连接 $s$ 与 $s'$ 或 $t$ 与 $t'$ 之间的路为边所构成的超图。Hu 证明了 $H(G)$ 是准正规的(已知的结果："双 - 商品流定理")。图 20 所示的图 $G$，$H(G)$ 正好是图 19 中的超图，故 $H(G)$ 不是 Menger 的。

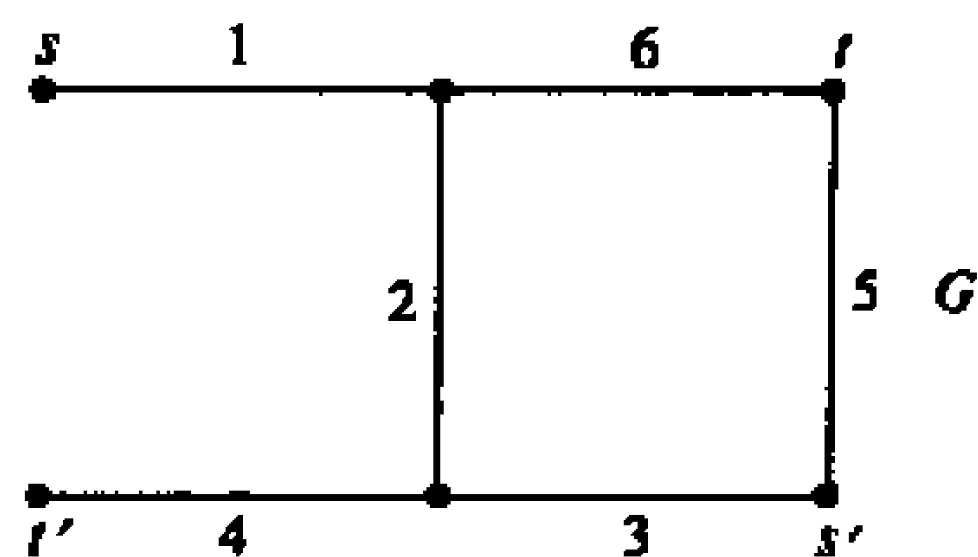



图 20

**定理 21**(Lehman, Fulkerson) $H$ 是简单超图。令 $K = T_rH$，则 $H$ 是准正规超图的充要条件是：

(1) $\tau(H^w)\tau(H^c) \leqslant \langle c, w \rangle \qquad (\forall c, w \in \mathbf{N}^n)$

Lehman[1975] 证明了对所有准正规超图(1)式成立。Fulkerson 利用"区组化"矩阵把定理推广到非整矩阵中①。

设 $G$ 是一个以 $a$ 为发点，$z$ 为收点的网络。用 $c_i$ 表示边 $i$ 的"长度"，$w_i$ 表示边 $i$ 的"宽度"。$H$ 是以 $G$ 的边作为顶点，以 $a$ 和 $z$ 之间的路为边的超图，则有以下两个解释：

$\tau(K^c) = \min\limits_{E \in H} \sum\limits_{i \in E} c_i$ 是从 $a$ 到 $z$ 最短路的长度；

$\tau(H^w) = \min\limits_{T \in T_rH} \sum\limits_{i \in T} w_i$ 是 $a$ 和 $z$ 之间最小割集的宽度。

故又称(1)式为宽 - 长不等式。

**推论** $H$ 是简单准正规超图，则 $T_rH$ 也是准正规超图。

**证** 对 $K = T_rH$，不等式(1)可写为

$$\tau(K^w)\tau([T_rK]^c) \leqslant \langle c, w \rangle \qquad (\forall w, c \in \mathbf{N}^n)$$

因此 $K$ 是准正规的。

**注** 若 $H$ 是 Menger 的，则上述推论证明了 $T_rH$ 是准正规的。但是 $T_rH$ 未必

① 关于矩阵证明可参见 Fulkerson[1981]：设 $A$ 是一个矩阵，$a_{ij} \geqslant 0$ 为实数，且 $A$ 中没有一列是其他列的凸线性组合。$A$ 的"区组化"矩阵 $B$ 是以多面体

$$P = \{t \mid t \in \mathbf{R}^n, t \geqslant 0, A^{\mathrm{T}}t \geqslant 1\}$$

的极点为列矢量的矩阵。

易见，矩阵 $A$ 和 $B$ 扮演了对称角色。当 $A$ 是超图 $H$ 的关联矩阵时，矩阵 $B$ 是 $T_rH$ 的关联矩阵的充要条件是：$H$ 为准正规的。

是 Menger 的。例如,图17所示的 Mengerian 超图的横贯超图为图19,而该超图不是 Menger 的。由定理19,若 $H$ 是平衡的,则 $T_rH$ 是准正规的。当 $H$ 是正规超图时,$T_rH$ 未必是正规的。例如,图16所示的正规超图 $H$ 满足 $\tau^*(T_rH)=\frac{5}{2}$,故 $T_rH$ 不是准正规的。

在图论中出现的一类重要的准正规超图簇,它由 Little[1973] 推广了 Kasteleyn 的思想引进的"S-联"和 Lovász[1977] 引进的"S-割"概念来定义的。

设 $G=(X,E)$ 是无环连通的多重图且 $\emptyset\neq S\subset X$。若由边子集 $F\subset E$ 所诱导的部分子图 $G'=(X,F)$ 的奇顶点集恰为 $S$,称满足上述性质的极小边子集 $F$ 是 $G$ 的一个 **S-联**。

显然,$G$ 存在 S-联当且仅当 $|S|$ 为偶数。事实上,若 $|S|$ 为偶数,将 $S$ 中的顶点两两配对:$\{s_1,s'_1\},\{s_2,s'_2\},\cdots$,对每个 $i$,取一条连接 $s_i$ 与 $s'_i$ 之间的路 $\mu_i$。$G$ 中含在奇数条路 $\mu_i$ 上的边的全体构成一个 S-联。反之,若存在一个 S-联 $F$,则部分子图 $G'=(X,F)$ 满足

$$|S|\equiv\sum_{x\in S}d_{G'}(x)\equiv\sum_{x\in X}d_{G'}(x)\equiv 2m(G')\equiv 0\pmod 2$$

以 $G$ 中所有 S-联为边所构成的超图称为 $G$ 的 S-联超图,记为 $H^S$。

下面是图论中的一些概念。设 $G=(X,E)$ 是 $X$ 上的一个多重图,$\emptyset\neq A\subset X$。$G$ 中连接 $A$ 和 $X-A$ 之间的边集 $\omega(A)$ 称为键。极小键称为反圈。易证 $\omega(A)$ 是反圈当且仅当 $G[A]$ 和 $G[X-A]$ 均为连通图。此外,$\omega(A)=\omega(X-A)$。设 $S\subset X$,若 $\omega(A)$ 是一个反圈且满足 $|S\cap A|$ 及 $|S\cap(X-A)|$ 均为奇数,则称 $\omega(A)$ 为 $G$ 的 S-割。

易见 $G$ 中存在 S-割当且仅当 $|S|$ 为偶数。用 $K^S$ 表示由 $G$ 中所有 S-割所构成的超图。

**例1** $G=\{X,E\}$ 是阶为偶数的连通多重图。由 S-联的极小性,$G$ 的一个 X-联不含 $G$ 的圈。因此它是 $G$ 的一个森林。此外,这个森林中的每个顶点度数均为奇数。特别地,若 $G$ 存在完美匹配,它就是 $G$ 的一个 X-联。另一方面,X-割只是当 $|A|$ 为奇数时的反圈 $\omega(A)$。

**例2** 设 $G=(X,E)$ 是一个运输网络,其发点为 $a$,收点为 $z$,每条边赋予一个容量。令 $S=\{a,z\}$,则 S-联是连接 $a$ 与 $z$ 的路,S-割是分离 $a$ 和 $z$ 的边割集。

**例3** $G$ 是 $X$ 上一个连通的多重图,每条边赋予一个长度,$S$ 为 $G$ 中所有奇顶点集合,则 $G$ 的一个 S-联是将 $G$ 中某些边必须变为重边而成为 Euler 多重图的极小边集。

在运筹学中著名的"中国邮递员问题"解中的那些往返两次的边定义为最小总长的 S-联。S-割是一个 $|A\cap S|$ 为奇数的反圈 $\omega(A)$,且满足

$$|\omega(A)|\equiv\sum_{x\in A\cap(X-S)}d_G(x)+\sum_{x\in A\cap S}d_G(x)\equiv|A\cap S|\equiv 1\pmod 2$$

**性质**　$G$ 是一个连通的多重图，$S \subset X$ 且 $|S|$ 为偶数，则 $S$- 割超图 $K^S$ 是 $S$- 联超图 $H^S$ 的横贯超图。

**证**　1. 首先证明对每个 $E \in H^S$ 和 $F \in K^S$，有 $E \cap F \neq \emptyset$。

否则，若存在 $E \in H^S, F = \omega(A)$ 使 $E \cap F = \emptyset$，这里 $|S \cap A|$ 和 $|S \cap (X - A)|$ 均为奇数。由于 $E$ 是由 $S$ 中两两顶点 $\{s_i, s'_i\}$ 间配对并连接成边不交的路 $\mu_i$ 的并。由于 $\mu_i$ 与 $\omega(A)$ 不相交，故有 $|S \cap A|$ 和 $|S \cap (X - A)|$ 均为偶数，矛盾。

2. 设 $F_0 \in T_r H^S$。因 $F_0$ 与所有 $E \in H^S$ 相交，从而 $G - F_0$ 中不可能将 $S$ 中的顶点两两配对成 $\{s_i, s'_i\}$，而使 $s_i$ 与 $s'_i$ 之间有路连接，因此 $G - F_0$ 含有若干连通分支 $X_1, X_2, \cdots, X_k$，且至少有一个 $|S \cap X_i|$ 为奇数，否则，在 $S$ 中存在上述顶点间的配对。由于 $G$ 是连通的，故有 $F_0 \supset \omega(S \cap X_i)$。因此，$F_0$ 含有一个 $S$- 割 $F$。则由横贯 $F_0$ 的极小性，有 $F_0 = F$。又由上述 1.，$H^S$ 的每个极小横贯是一个 $S$- 割。

**Lovász-Seymour 定理**　$G$ 是连通的多重图，$S$ 是有偶数个顶点的集，则 $H^S$ 和 $K^S$ 均是准正规超图。

事实上，Lovász[1977] 证明了 $K^S$ 是准正规的。Seymour[1977] 证明了 $H^S$ 是准正规的。由前面的性质及推论，这两个定理是等价的。此外，Lovász[1977] 还证明了

$$\nu_{2k}(K^S) = k\nu_2(K^S)$$

**注**　在一般情况下，$H^S$ 和 $K^S$ 不是 Menger 的。例如，设 $G$ 是无桥且边色数为 4 的 3- 正则图(如 Petersen 图)，Seymour 证明了 $H^X$ 没有 König 性质，当然也不是 Mengerian 超图。但 Seymour[1977] 猜测：如果 $H^X$ 不含导出子图 $K_4^*$，则 $H^X$ 是 Menger 的。

## 习　题　5

1.(§1)　若 $r(H) > 3$，并非是每一个 $B$- 圈均含一个子 $B$- 圈满足任意两条在圈中不相继的边是不相交 的。在如下定义的长为 7 的 $B$- 圈中证明此结论：

(12, 2 390, 34, 45, 5 690, 678, 781)

2.(§1)　Sterboul[1973] 猜测：若 $\chi(H) > 2$，则存在 $B$- 圈使得任意一对在圈中不相继的边不相交。以 $K'_{2r-1}$ 为例说明，不能假设 $B$- 圈有更进一步的性质：在圈中两条相继的边恰好有一个公共点。

3.(§2)　证明例 2 是 §2 中例 3 的一个特例。但 §2 中的例 4 不能看作为例 3 的特例(利用图拟阵的 Tutte 定理)。

4.(§2)　设 $P_n$ 是 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 上的一条路。$H_n$ 是 $X$ 上的一个超图，其边为补图 $\bar{P}_n$ 的极大团。证明：当 $n \leqslant 6$ 时，$H_n$ 是全单模的(Chvátal)。

提示:通过选择一个适当的树将其转化为例4的情形。

5.(§2) 由Ghouila-Houri的定理用下述方法证明定理5的推广形式:设$A$是元素为0,1或$-1$的矩阵,不含阶数为$2k+1$的子方阵且每个元素大于或等于圈$C_{2k+1}$的关联矩阵$B_{2k+1}$中对应的元素,则$A$是全单模的。

(Commoner[1973]给出了另一个证明。在这种情况下,Yannakakis[1980]给出了找最大匹配的一个有效算法)

6.(§2) 设$G$是一个2-部图。$H$是以$G$的边集$E$为顶点集,$E$和$G$的所有的星作为边的超图。证明:$H$是单模的。

7.(§3) Meynied的猜测:对每个超图$H$,关系式

$$\chi(H_A)\leqslant k \qquad (A\subset X)$$

蕴含着$\tau(H)\leqslant(k-1)\nu(H)$。由定理10,$k=2$时这猜测成立。此外,若$H$是完全多部超图的部分超图,则此猜测可推导出Ryser的猜测。

8.(§3) $A$是完全平衡超图的关联矩阵。证明:在布尔乘积下的矩阵$A^{T}A$也是完全平衡的,同样$(A^{T}A)^{k}$也是完全平衡的①(Lubiw[1985])。

9.(§3) 设$H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$是$X$上的完全平衡超图。证明:$H+(X)$和$H+(E_1\cap E_2)$也是完全平衡超图。

10.(§3) 利用前一习题证明:$n$阶不含重边的完全平衡超图至多有$\binom{n}{2}+n$条边,且$n$阶不含重边的极大完全平衡超图恰好有$\binom{n}{2}+n$条边(Anstee[1985])。可参看Lehel[1985]的一个简单证明。

11.(§4) $L(H)$是超图$H$的线图,每条边$[e_i,e_j]$赋予一个权$|E_i\cap E_j|$。令$F\subset L(H)$是一个具有最大权的森林。证明:

$$\mu(H)=\sum_{i=1}^{n}(p(F_{X_i})-1)$$

这里$X_i=\{e_j|x_i\in E_j,E_j\in H\}$,$p(F_{X_i})$表示$X_i$在$F$的诱导子图的连通分支个数(Lewin[1983])。

12.(§7) Lovász证明了:"若有向图$G$至多有$k$个两两不相交的余圈,则覆盖每条弧至多2次的余圈簇(可重复)的基数不超过$2k$。"证明这结果蕴含了Lucchesi和Younger的定理的推广情形:"若在有向图$G$中,赋予每条边$i$一个整数权$c_i\geqslant0$,则与每个余圈均相交的弧集的最小权等于用弧$i$至多$c_i$次($i=1,2,\cdots,m$)的余圈簇的最大基数。"

13.(§7) 与定理18之后的引理3类似,Schrijver猜测下面条件等价:

---

① 原文要证明$A^k$是完全平衡的。但显然$n\neq m$时,$A^k(k\geqslant2)$是无意义的。

(1) $\frac{1}{k}\tau_k(H') = \tau^*(H') \qquad (H' \subset H)$

(2) $\nu_k(H') = \tau_k(H') \qquad (H' \subset H)$

当 $k = 1,2,3$ 时，Lovász [1977] 证明了(1)与(2)等价。而 $k = 60$ 时，Schrijver，Seymour [1979] 证明了这个猜测是不对的。现对于 $X = \{1,2,\cdots,9\}$ 上的超图 $H$，其边为

$$E_1 = X - \{1,3,5\}, \qquad E_2 = X - \{1,4,6\},$$
$$E_3 = X - \{2,3,6\}, \qquad E_4 = X - \{2,4,5\},$$
$$E_5 = X - \{7\}, \qquad E_6 = X - \{8\},$$
$$E_7 = X - \{9\}$$

证明：$\tau_{60}(H') = 60\tau^*(H')$ 和 $\nu_{60}(H) \neq 60\tau^*(H)$。

14.(§7) 证明下述条件等价：

(1) $\tau^*(H^c)$ 是一个整数 $\quad (c \in \{0,1\}^n)$

(2) $\tau^*(H^c) = \tau(H^c) \quad (c \in \{0,1\}^n)$

提示：若(1)成立而(2)不成立，考虑一个阶数最小而使(2)不成立的超图。

15.(§7) 由前面的习题来推导下述条件等价：

(1) $\nu(H^c) = \tau(H^c) \quad (c \in \{0,1\}^n)$

(2) $\nu(H^c) = \tau^*(H^c) \quad (c \in \{0,1\}^n)$

# 参 考 文 献


Acharya B. D. , *On Lovász hypergraphs*, *Private communication*, 1983.

Acharya B. D. , and M. las Vergnas, Hypergraphs with cyclomatic number zero, triangulated graphs, and an inequality, *J. Comb. Theory B*, 33, 1982, 52~56.

Anstee R. P. , Properties of (0, 1)-matrices with forbidden configurations, *J. Comb. Theory A*, 31, 1981, 256~269.

Anstee R. P. , and M. Farber, Characterizations of totally balanced matrics, *J. Algorithms* 5, 1984, 215~230.

Berge C. , Färbung von Graphen, deren sämtliche bzw deren ungerade Kreise starr sind, *Wissenschaftliche Zeitung*, Martin Luther Univ. Halle Wittenberg, 1961, 114~115.

Berge C. , Hypergraphs generalizing bipartite graphs, *Integer and Non-Linear Programming*, Chap. 26, (J. Abadie, ed. ), North Holland, Amsterdam 1970, 507~509.

Berge C. , Some classes of perfect graphs, *Graph Theory and Theoretical Physics*, Chap. 5, (F. Harary, ed. ), Academic Press, New York 1967.

Berge C. , The rank of a family of sets and some applications to graph theory, *Recent Progress in Combinatorics*. (W. T. Tutte, ed. ), Academic Press, 1969, 49~57.

Berge C. , Sur certains hypergraphes généralisant les graphes bipartis, *Combinatorial Theory and Its Applications*, (Erdös, Rényi, Sós, eds), North Holland, Amsterdam-London 1970, 119~133.

Berge C. , Balanced matrices, *Math. Progr*. 2, 1972, 19~31.

Berge C. , On the good $k$-colorings of a hypergraph, *Infinite and Finite Stes*, (Coll. Math. Soc. J. Bolai 10, 1973). North Holland, 159~163.

Berge C. , Balanced matrices and property $G$, *Math. Programming Study* 12, 1980, 163~175.

Berge C. , Minimax theorems for normal hypergraphs and balanced hypergraphs, *Ann. Discrete Math*. 21, 1984, 3~19.

Berge C. , C. C. Chen, V. Chvátal, and C. S. Seow, Combinatorial properties of polyominoes, *Combinatorica* 1, 1981, 3, 1982, 217~224.

Berge C. , and M. las Vergnas, Sur un théorème du type könig pour hypergraphes, *Annals N. Y. Acad. Sc*. 175, New York Academy of Sciences, 1970, 32~40.

Bixby R. E. , Matroids and operations research, 7. 3. An algorithm for testing if a matrix is totally unimodular, *in Advanced Techniques in the Practice of Operations Research*, (*H. Greenberg*, *F. Murphy*, *S. Schews*, *eds*. ), *North Holland*, *Amsterdam* 1982, 443~446.

Buneman P. , A characterization of rigid circuit graphs, *Discrete Math*. 9, 1974, 205~212.

Brouwer A. E. , P. Duchet, and A. Schrijver, Graphs whose neighbourhoods have no special cycle, *Discrete Math*. 47, 1983, 177~182.

Brualdi R. , Matrices of 0's and 1's with total support, *J. Comb. Theory A*, 28, 1980, 249~256.

Camion P. , Matrices totalement unimodulaires et problèmes combinatoires, Thesis, Brussels 1963.

Chandrasekaran R. , and A. Tamir, Polynomially bounded algorithms for locating $p$ centers on a tree, *Math. Programming* 22, 1982, 304~315.

Chang G. J. , and G. L. Nemhauser, The $k$-domination and $k$-stability problems on sumfree chordal graphs, *SIAM J. Algebraic and Discrete Methods* 5, 1984, 332~345.

Chvátal V. , On certain polytopes associated with grahps, *J. Comb. Theory B*, 18, 1975, 138~154.

Chvátal V., *Linear Programming*, Freeman, New York 1983.

Conforti M., and G. Cornuéjols, An algorithmic framework for the matching problem in some hypergraphs, *Networks* 17, 1987, 365~386.

Conforti M., and M. R. Rao, Structural properties and recognition of restricted and strongly unimodular matrices, *Math. Programming* 38, 1987, 17~27.

Commoner F. G., A sufficient condition for a matrix to be totally unimodular, *Networks* 3, 1973, 351~365.

Cook W., Balanced matrices and minimax theorem for directed graphs, CORR Report 82-7, 1982, University of Waterloo.

Cramar Y., P. L. Hammer, and T. Ibaraki, Strong unimodularity for matrices and hypergraphs, Discrete Applied Math., 15, 1986, 221~239.

Csima J., Stochastic functions on hypergraphs, *Combinatorial Theory and Its Applications*, (Erdös, Rényi, Sós, eds.), North Holland, Amsterdam-London 1970, 247~251.

de Werra D., Equitable colorations of graphs, *Revue Fr, Informatique et R. O.*, R-3, 1971, 3~8

Duchet P., Thesis, University of Paris 6, 1979.

Duchet P., Tree hypergraphs and their representative trees, preprint 1985.

Duchet P., Classical perfect graphs, *Topics of Perfect Graphs*, (C. Berge, V. Chvátal, eds.), Annals of Discrete Math. 21, North Holland 1984, 67~96.

Duchet P., $n^{n-2}$, in *Algorithme et Ensembles Ordonnés*, (M, Habib, ed.), Ecole des Mines, Saint Etienne 1981.

Duchet P., Propriété de Helly et problèmes de représentation, *Problèmes Combinatoires et Théories de Graphes*, (Orsay 1976), Edition du C. N. R. S., Paris 1978, 117~118.

Edmonds J., Submodular functions, matroids and certain polyhedra, *Combinatorial Structures and Applications*, *London* 1970, 69~87.

Edmonds J., Edge disjoint branchings, *Combinatorial Algorithms*, New York 1973, 91~96.

Edmonds J., and R. Giles, A min-max relation for submodular functions on graphs, *Studies in Integer Programming*, Annals of Discrete Math. 1, 1977, 185~204.

Edmonds J., and E. L. Johnson, Matching, Euler tours and the Chinese postman, *Math. Programming* 5, 1973, 88~124.

Fagin R., Degrees of acyclicity for hypergrahps and relational database schemes, *J. of ACM* 30, 1983, 514~550.

Farber M., Applications of lp duality to problems involving independence and domination, Ph. D. Thesis, Rutgers University 1982.

Farber M., Domination, independent domination, and duality in strongly chordal graphs, *Discrete Appl. Math.* 7, 1984, 115~130.

Farber M., Characterizations of strongly chordal graphs, *Discrete Math.* 43, 1983, 173~189.

Flament C., Hypergraphes arborés, *Discrete Math.* 21, 1978, 223~226.

Fournier J.-C., and M. las Vergnas, A class of bichromatic hypergraphs, *Topics on Perfect Graphs*, *Annals Discrete Math.* 21, 1984, 21~27

Fulkerson D. R., Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra, *Math. Programming* 1, 1971, 168~194.

Fulkerson D. R., A. J. Hoffman, and R. Oppenheim, On balanced matrices, *Math. Programming Study* 1, 1974, 120~132.

Frank A., Some polynomial algorithms for certain graphs and hypergraphs, Proceedings, *5th British Combinatorial Conference* (Aberdeen 1975), Utilitas Math. Publ. Inc., Winnipeg 1976, 211~226).

Frank A., On a class of balanced hypergraphs, *Discrete Math*. 20, 1977, 11~20.

Frank A., Kernel systems of directed graphs, *Acta Sci. Math*. (Szeged) 41, 1979, 63~76.

Füredi Z., and Z. Tuza, Hypergraphs without a large star, *Discrete Math*. 55, 1985, 317~321.

Gavril F., The intersection graphs of subtrees in a tree are exactly the chordal graphs, J. *Comb. Theory B*, 16, 1974, 47~56.

Gavril F., A recognition algorihm for the intersection graphs of paths in trees, Discrete Math. 23, 1978, 211~227.

Ghouila-Houri A., Characterisation des matrices totalement unimodulaires, *C. R. Acad. Sci. Paris* 254, 1962, 1192~1193.

Golumbic M., *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, New York 1980.

Gupta R. P., An edge-coloration theorem for bipartite graphs, *Discrete Math*. 23, 1978, 229~233.

Hansen P., and M. las Vergnas, On a property of hypergraphs with no cycles of length greater than two, *Hypergraph Seminar*, (C. Berge, D. K. Ray-Chaudhuri, eds.), Lecture Notes in Math. 411, Springer Verlag, Berlin 1974, 99~101.

Hilton A. J. W., Decomposing regular $r$-uniform hypergraphs into regular factors, *Studia Sci. Math. Hung* 18, 1983, 107~412.

Hoffman A. J., Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combinatorial analysis, *Proc. Symposia in Applied Math*. 10, 1960, 113~127.

Hoffman A. J., A generalisation of maxflow-mincut, *Math. Prog*. 6, 1974, 352~359.

Hoffman A. J., Total unimodularity and combinatorial theorems, *Linear Algebra and Applicaions* 13, 1976, 103~108.

Hoffman A. J., and J. B. Kruskal, Integral boundary points of convex polyhedra, *Ann. of Math. Studies* 38, Princeton 1956, 223~246.

Hoffman A. J., M. Sakarovitch, and A. W. J. Kolen, Totally balanced and greedy matrices, *SIAM J. Algebraic and Discrete Methods*, to appear-Report 8293/0 Erasmus University, Rotterdam 1985.

Hoffman A. J., and D. E. Schwartz, On lattice polyhedra, *Proc. 5th Hung. Coll. on Combinatorics*, North Holland, Amsterdam 1978, 593~598.

Hu T. C., Multicommodity network flow, *Op. Res*. 11, 1963, 344~348.

Kachian L. G., A polynomial algorithm in linear programming, *Soviet Mathematics Doklady* 20, 1979, 191~194.

Karmarkar N., A new polynomial time algorithm for linear programming, *Proc. Sixteenth Annual ACM Symp. on Theory of Computing*, Washington 1984, 302~311.

Kolen A., Location problems on trees and in the rectilinear plane, Ph. D. Thesis, Math. Centrum. Amsterdam 1982.

Lehel J., A characterization of totally balanced hypergraphs, *Discrete Math* 57, (1985), 59~65.

Lehman A., On the width length inequality, preprint 1965.

Lewin M., On the width length inequality, reprint, 1965.

Lewin M., On hypergraphs without significant cycles, *J. Comb. Theory B* 20, 1976, 80~83.

Lewin M., On intersection multigraphs of hypergraphs, *J. Comb. Theory B.*, 34, 1983, 228~232.

Li Wei-Xuan, The cycle chromatic number of a hypergraph and an inequality of Lovósz, *Progress in Graph Theory*, (Waterloo 1982), Academic Press, Toronto 1984, 381~387.

Lovósz L., Graphs and set-systems, *Beiträge zur Graphentheorie*, Teubner 1968, 99~106.

Lovósz L., Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, *Discrete Math*. 2, 1972, 253~267.

Lovósz L. ,On two minimax theorems in graphs, *J. Comb. Theory B*, 21, 1976, 96～103.

Lovósz L. ,Certain duality principles in graph theory, *Ann. Discrete Math.* 1, 1977, 96～103.

Lovász L. , *Combinatorial Problems and Exercises*, North Holland, Amsterdam, 1979.

Lubiw A. , Γ-free matrices, Master's Thesis, University of Waterloo 1982.

Lubiw A. ,Doubly lexical orderings of matrices. Proc. 17th A. C. M. Symposium on Theory of Computing, *Association for Computing Machinery*, 1985, 396～403.

Lucchesi C. C. ,and D. H. Younger, A minimax relation for directed graphs, *J. London Marth. Soc.* 17, 1978, 369～374.

Maurras J. -F. , Polytopes à sommets dans $[0,1]^n$, Ph. D. Thesis, Pais 7, 1976.

Padberg M. W. ,On the facial structure of set packing polyhedra, *Math. Programming* 5, 1973, 199～215.

Padberg M. W. , Perfect zero-one matrices, *Math. Programming* 6, 1974, 180～196.

Padberg M. W. ,Characterization of totally unimodular, balanced and perfect matrices, *in Combinatorial Programming Methods and Applications*, (B. Roy, ed. ), Reidel, Dordrecht 1975, 275～284.

Paderg M. W. , Almost integral polyhedra related to certain combinatorial optimization problems, *Linear Algebra and Its Applications* 15, 1976, 69～88.

Padberg M. W. , A note on the total unimodularity of matrices, *Discrete Math.* 14, 1976, 273～278.

Padberg M. W. , Total unimodularity and the Euler subgraph problem, *operations Research Letters* 7, 1988, 173～179.

Ryser H. J. , A fundamental matrix equation for finite sets, *Proc. Amer. Math. Soc.* 34, 1972, 332～336.

Ryser H. J. , *Combinatorial Mathematics*, Carus Mathematical Monographs 14, Math. Assoc. Amer. , Washington D. C. 1963.

Sakarovitch M. , Quasi-balanced matrices, *Math. Programming* 8, 1975, 382～386.

Sakarowitch M. , Sur quelques problèmes d'optimisation combinatoire, Ph. D. Thesis, Grenoble 1975.

Schrijver A. , Fractional packing and covering, *Packing and Covering*, Stichting. Math. Centrum Amsterdam 1978, 175～248.

Schrijver A. , Min-max relations for directed graphs, Report AE 21/80.

Schrijver A. ,and P. D. Seymour, Solution of two fractional packing problems of Lovász, *Discrete Math.* 26, 1979, 177～184.

Seymour P. D. , The forbidden minors of binary clutters, *J. London Math. Soc.* 12, 1976, 356～360.

Seymour P. D. , *Discrete Optimization*, Lecture Notes, Univ. Oxford 1977.

Seymour P. D. , Decomposition of regular matroids, *J. Comb. Theory B*, 28, 1980, 305～359.

Shearer J. B. , A class of perfect graphs, *SIAM J. Alg. Discrete Math.* 3, 1982, 281～284.

Slater P. J. , *R*-domination in graphs, *J. A. C. M.* 23, 1976, 446～450.

Slater P. J. , A characterization of soft hypergraphs, *Canad. Math. Bull.* 21, 1978, 335～337.

Tamir A. , A class of balanced matrices arising from location problems, *SIAM J. Alg. Discrete Math.* 4, 1983, 363～370.

Tamir A. , Totally balanced and totally unimodular matrices defined by center location problems, reprint, New York University 1985.

Tarjan R. E. ,and M. Yannakakis, Simple linear time algorithms to test chordality of graphs, test acyclicity of hypergraphs, and selectively reduce acyclic hypergraphs, *SIAM J. of Computing* 13, 1984, 566～579.

Trotter W. T. ,and J. I. Moore, Characterization problems for graphs, partially ordered sets, lattices and families of sets, *Discrete Math.* 16, 1976, 361～381.

Tucker A. , A structure theorem for the consecutive 1's property, *J. Comb. Theory* 12, 1972, 361～381.

Veinott A. F., and G. B. Dantzig, Integral extreme points, *SIAM Review* 10, 1968, 371~372.

Vidyansankar K., and D. H. Younger, A minimax equality related to the longest directed path in an acyclic graph, *Canad. J. Math*. 29, 1975, 348~351.

Wei-Xuan Li, The cycle chromatic number of a hypergraph and an inequality of Lovász, *Progress in Graph Theory*, (Waterloo 1982), Academic Press, Toronto 1984, 381~387.

Woodall D. R., Menger and König systems, *Theory and Applications of Graphs*, Lecture Notes in Math. 642, Springer Verlag 1978, 620~635.

Woodall D. R., Minimax Theorems in Graph Theory, Chapter 9 of *Selected Topics in Graph Theory*, (L. Beineke, R. J. Wilson, eds.), Academic Press, London, 1978, 237~269.

Yannakakis M., On a class of totally unimodular matrices, *Math. of Oper. Res*. 10, (2), 1985, 280—304.

Zhang Cun-Quan, and Li Wei-Xuan, A class of hypergraphs satisfying an inequality of Livász, *J. Comb. Theory B*, 34, 1983, 224~228.

Zykov A. A., Hypergraphs (in Russian), *Uspekhi Mat. Nauk* 29, 1974, 89~154.

# 附　　录

## 拟阵中的匹配和着色

Whitney 在 1935 年，引入了拟阵这概念，当时是为了推广线性独立这一概念，使得能在最优化理论中重建一大批定理。首先通过它，许多学者看到超图中的独立集可用来在 Kruskal 的贪婪算法中去求最大权的树。Tutte，Camion 和 Seymour 证明了单模超图等同于正则拟阵。他们还证明了若 $\mathscr{C}$ 是拟阵中的圈簇，$e$ 是拟阵中的元素，则超图 $\{C-e \mid C \in \mathscr{C}, e \in C\}$ 是 Menger 的当且仅当拟阵是线性的，且不含 Fano 拟阵为其子式[①]。

在此所要考虑的超图中的匹配和着色等概念在前面章节中已给出。

令 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 是一个有限集，又令 $\mathscr{F}$ 是 $E$ 中的子集簇，称 $\mathscr{F}$ 是 $E$ 上的一个拟阵，若它满足下面三条公理：

(1) $\{e_i\} \in \mathscr{F} \quad (i=1,2,\cdots,m)$

(2) $F \in \mathscr{F}, F' \neq \varnothing, F' \subset F \Rightarrow F' \in \mathscr{F}$

(3) 对任意 $S \subset E$，若 $F, F'$ 分别为含于 $S$ 中且属于 $\mathscr{F}$ 的两个极大子集，则 $|F|=|F'|$

$M=(E,\mathscr{F})$ 称为 $E$ 上的**简单拟阵**，当 $\mathscr{F}$ 是一个遗传超图。可对拟阵考虑相同的概念：秩 $r(S)$ 被定义为

$$r(S)=\max_{F \in \mathscr{F}} |F \cap S|$$

由公理(3)，含于 $S$ 又属于 $\mathscr{F}$ 的极大子集具有基数 $r(S)$。

在拟阵理论中，称 $E$ 中元素为拟阵 $M$ 中元素。$\mathscr{F}$ 中的子集称为**独立集**，在超图中也被称为边。不在 $\mathscr{F}$ 中的子集称为**相关集**。极小的相关集称为**圈**。

**性质 1**　若 $M=(E,\mathscr{F})$ 是秩为 $r$ 的拟阵，则 $M$ 中的最大独立集构成秩为 $r$ 的一致超图。

显然。

**性质 2**　若 $M=(E,\mathscr{F})$ 是秩为 $r$ 的拟阵。又若 $A \subset E$，则 $M$ 的子超图 $\mathscr{F}_A=\{F \cap A \mid F \in \mathscr{F}, F \cap A \neq \varnothing\}$ 是一个秩为 $r_A(S)=r(S)$ 的拟阵。

显然。

---

① (P. Seymour, J. C. T., B23, 1977, 189－222)。对一般的术语和更详尽的表达，建议读者参看 D. Welsh, Matroid Theory, New York: Academic Press, 1976 一书，或参看 H. Greenberg, F. Murphy, S. Shaw 主编的 Advanced Techniques, North Holland, Amsterdam, 1982 一书中的 R. E. Bixby, Matroids and Operations Research。

**性质 3** 若 $M=(E,\mathscr{F})$ 是一个拟阵，则任一 $k$- 截口

$$\mathscr{F}_k=\{F \mid 1\leqslant |F|\leqslant k, F\in\mathscr{F}\}$$

构成一个秩为 $r_{(k)}(S)=\min\{k, r(S)\}$ 的拟阵。

显然。

**例 1** 集 $E$ 的非空子集簇 $\mathscr{P}'(E)$ 是一个秩为 $r(S)=|S|$ 的拟阵。它的强独立数为 $\bar{\alpha}=1$。

$$\mathscr{P}_{(k)}=\{A \mid A\subset E, 1\leqslant |A|\leqslant k\}$$

是 $\mathscr{P}'(E)$ 的 $k$- 截口，从而也是一个拟阵。它的强独立数为 $\bar{\alpha}=1$。其圈为 $E$ 中 $k+1$ 个元素的子集。

**例 2** 取 $E$ 为线性空间中的有限集，$\mathscr{F}$ 为 $E$ 中的线性独立子集簇，则 $(E,\mathscr{F})$ 是一个拟阵。其 $S$ 的秩 $r(S)$ 为由 $S$ 扩张成的线性空间的维数，$\bar{\alpha}$ 为 $E$ 中最大共线的矢量的数目。

**例 3** 令 $G$ 是一个多重图，$E$ 为 $G$ 的边集，$\mathscr{F}$ 为 $E$ 中不含 $G$ 中圈的子集簇，则 $(E,\mathscr{F})$ 是秩为 $r(S)$ 的拟阵。这里 $r(S)$ 为 $S$ 在 $G$ 中诱导子图的余圈数。独立集为 $G$ 中的森林，圈是 $G$ 中的圈。

**例 4** 令 $G$ 是无桥的多重图。$E$ 为 $G$ 的边集，$\mathscr{F}$ 为 $G$ 中的边子集簇，满足对任意的 $E'\in\mathscr{F}$，$G-E'$ 的连通分支数不增，则 $(E,\mathscr{F})$ 是一个拟阵，其秩 $r(S)$ 为 $S$ 在 $G$ 中的诱导子图的圈秩数，它的基是最小余森林，它的圈是 $G$ 中的余圈。

**例 5** (Edmonds, Fulkerson [1965]) 令 $G$ 为定义在 $X$ 上无孤立点的图。对任一匹配 $V$，用 $S(V)$ 表示在 $V$ 中饱和的点。$\mathscr{F}$ 为 $X$ 中的子集簇满足 $\mathscr{F}$ 中任意 $F$ 含于某个 $S(V)$ 中。可证明 $(X,\mathscr{F})$ 是一个拟阵，其秩为

$$r(S)=|S|-\max_{T\subset S}\{p_i(G[T])-|\Gamma_G(T)-T|\}$$

这里 $p_i(H)$ 表示 $G$ 中子图 $H$ 的奇分支数。

**例 6** 对集 $E$ 的子集簇 $(A_j \mid j\in Q)$，令

$$A(Q)=\bigcup_{j\in Q}A_j=E$$

$E$ 中子集 $T=\{t_1,t_2,\cdots,t_k\}$，若存在一个映射：

$$j(i):\{1,2,\cdots,k\}\to Q$$

使得 $t_i\in A_{j(i)}$ $(i=1,2,\cdots,k)$，则称 $T$ 为 $(A_j \mid j\in Q)$ 的一个**部分横贯**。

$(A_j \mid j\in Q)$ 部分横贯簇构成 $E$ 上的一个拟阵，其秩为

$$r(S)=|Q|+\min_{J\subset Q}(|A(J)\cap S|-|J|)$$

上述拟阵称为簇 $\{A_j \mid j\in Q\}$ 上的**横贯拟阵**。

考察由 $Q=\{1,2,\cdots,q\}$ 和 $E=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 构成的二部图 $(Q,F;\Gamma)$，这里 $\Gamma(j)=A_j$ $(j\in Q)$。

由例 5 知，由匹配中的饱和点为集簇定义了拟阵。部分横贯集簇是上述拟阵的

$E$ 上的迹，故它是一个拟阵，其秩由 König 定理有

$$r(S)=\min_{J\subset Q}(|Q-J|+|\Gamma(J)\cap S|)$$
$$=q+\min_{J\subset Q}(|A(J)\cap S|-|J|)$$

**例 7**　若$(C_1,C_2,\cdots,C_p)$是 $E$ 的一个 $p$- 分划。又若 $c_1,c_2,\cdots,c_p$ 是满足 $1\leqslant c_i\leqslant|C_i|$ 的整数，则集簇

$$\mathscr{F}=\{F|F\subset E,F\neq\emptyset,|F\cap C_i|\leqslant c_i \text{ 对一切 } i\}$$

定义了一个 $E$ 上的拟阵，其秩为

$$r(S)=\sum_{i=1}^{p}\min\{c_i,|S\cap C_i|\}$$

**例 8**　令 $G$ 是一个简单图，$k\geqslant2$ 是一个整数。中心为 $x$ 的 $k$- 星定义为：由 $G$ 中与 $x$ 相关联的边中取不大于 $k$ 条的边集合生成的部分子图。Las Vergnas 证明如下结果：被两两顶点不交的 $k$- 星覆盖的顶点集 $S$ 作为拟阵的独立集，其秩为

$$r(S)=\min_{T\subset S}\{k|\Gamma_G(T)|+|S-T|\}$$

**例 9**　令 $f$ 是 $X$ 中的子集到 $\mathbf{N}$ 上的映射，满足

$$f(\emptyset)=0$$
$$A\subset B\Rightarrow f(A)\leqslant f(B)$$
$$f(A\cup B)+f(A\cap B)\leqslant f(A)+f(B)$$

Edmonds, Rota 和 Welsh 证明如下结果：满足对任一 $T\subset S$ 有 $|T|\leqslant f(T)$ 的 $S$ 构成拟阵的独立集，其秩为

$$r(S)=\min_{T\subset S}\{f(T)+|S-T|\}$$

由于下面证明的需要，这里先证明两条性质。

**性质 4**　若 $M=(E,\mathscr{F})$ 是一个拟阵，则它的秩 $r(A)$ 满足下列性质：

(1) $r(\emptyset)=0$

(2) $r(\{e\})=1\qquad(\forall e\in E)$

(3) $A\subset B\Rightarrow r(A)\leqslant r(B)$

(4) $r(A\cup B)+r(A\cap B)\leqslant r(A)+r(B)$

**证**　上述(1),(2),(3)是显然的。这里仅需证明(4)。令 $F$ 是含于 $A\cap B$ 中的一个独立集，满足 $|F|=r(A\cap B)$。又令 $F_A$ 是含于 $A$ 中的一个独立集，且满足 $|F_A|=r(A)$ 和 $F_A\supset F$。最后令 $E_0$ 是含于 $A\cup B$ 中的一个独立集，且满足 $|E_0|=r(A\cup B)$ 和 $E_0\supset F_A$。

显然有 $E_0\cap A=F_A$ 和 $E_0\cap(A\cap B)=F$。于是有

$$r(A\cup B)=|E_0|=|(E_0\cap A)\cup(E_0\cap B)|$$
$$=|(E_0\cap A)|+|(E_0\cap B)|-|E_0\cap(A\cap B)|$$
$$\leqslant|F_A|+r(B)-|F|=r(A)+r(B)-r(A\cap B)$$

故(4)成立。

**注**　性质(1),(2),(3),(4)是拟阵中秩函数的特征刻画。事实上,它亦能作为 $E$ 上的拟阵定义的一组公理。

**性质5**　若 $M$ 是一个拟阵,$F \in \mathscr{F}$ 而 $F \cup \{a\} \notin \mathscr{F}$,则 $F \cup \{a\}$ 中含拟阵中唯一的一个圈。

**证**　用反证法。令 $F$ 是使得 $F \cup \{a\}$ 含不止一个圈的基数最小的独立集。由于 $F \cup \{a\}$ 含两个相异的圈 $C_1, C_2$,显然有 $a \in C_1$ 和 $a \in C_2$。由 $C_1$ 和 $C_2$ 的极小性,存在 $a_1 \in C_1 - C_2$ 和 $a_2 \in C_2 - C_1$。

1. $A_0 = F \cup \{a\} - \{a_1, a_2\}$ 是一个独立集。否则考察 $F' = F - \{a_1\}$,它是含于 $F$ 的独立集。于是 $F' \cup \{a\}$ 包含 $C_2$ 和 $A_0$ 中的一个最小相关集,即 $F' \cup \{a\}$ 含两个相异的圈且 $|F'| < |F|$,这与 $F$ 的取法矛盾。

2. 在 $F \cup \{a\}$ 上诱导出的子拟阵是一个秩为 $|F|$ 的拟阵。由于 $|A_0| < |F|$,故有 $A_0 \cup \{a_i\} \in \mathscr{F}$ $(i = 1,2)$。但这与 $A_0 \cup \{a_i\}$ 中含相关集 $C_i$ 相矛盾。

**引理**　若 $S$ 是拟阵 $(E, \mathscr{F})$ 中最大强独立集①,则每个 $s \in S$ 与每个 $a \in E - S$ 相邻。

**证**　事实上,若 $S$ 是一个最大强独立集,则 $r(S) = 1$。令

$$S = \{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$$

考察 $a \in E - S$。由于 $S \cup \{a\}$ 不是强独立集,故存在 $s_j \in S$ 与 $a$ 相邻。若 $k \neq j$,$s_k \in S$,由于 $A = \{a, s_j, s_k\}$ 秩为2,故 $s_k$ 与 $\{a, s_j\}$ 相邻,且 $A$ 中含 $s_k$ 的独立集总含在满足 $|F \cap A| = 2$ 的极大独立集 $F$ 中。故 $a$ 与 $s_k (k = 1,2,\cdots,p)$ 相邻。

**定理1**　若 $M = (E, \mathscr{F})$ 是一个具有强独立数 $\bar{\alpha}(M) \geqslant \dfrac{|E|}{2}$ 的拟阵,则 $\bar{\alpha}(M) = \rho(M)$。

**证**　事实上,考察最大强独立集 $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_p\}$。记 $E - S = \{a_1, a_2, \cdots, a_q\}$,$q \leqslant p$。

由引理知存在包含 $a_i, s_j$ 的边 $F_{ij}$,于是 $E$ 被 $p$ 中的边 $F_{1,1}, F_{2,2}, \cdots, F_{q,q}, F_{q,q+1}, \cdots, F_{q,p}$ 所覆盖,故有 $\rho(M) \leqslant p = \bar{\alpha}(M)$。

又由于反过来的不等式是成立的,故 $\rho(M) = \bar{\alpha}(M)$。

**定理2**　拟阵 $M = (E, \mathscr{F})$ 是保形的充要条件是:存在 $E$ 的一个分划 $(S_1, S_2, \cdots, S_q)$,使得

$$\mathscr{F} = \{F \subset E \mid F \neq \varnothing, |F \cap S_i| \leqslant 1, i = 1,2,\cdots,q\}$$

① 这里将 $\mathscr{F}$ 看成一个超图。

**证** 令 $S_1 = \{s_1, s_2, \cdots, s_p\}$ 是一个秩为 $h = r(E)$ 的保形拟阵中的极大强独立集。事实上仅需证明 $\mathscr{F}$ 是定理中描述的形式：

1. 令 $F_1$ 是含 $s_1$ 的最大独立集。取 $A = E - S_1, A_1 = F_1 \cap A$，则 $|F_1| = h$，从而 $|A_1| = h - 1$。

2. $A_1$ 是 $A$ 中最大独立集。若不然，存在 $a \in A$，使得 $A_1 \cup \{a\} \in \mathscr{F}$。由引理知 $a$ 与 $s_1$ 相邻，故存在含 $a, s_1$ 的最大独立集 $F_{a,s_1}$。当拟阵是保形时，由第1章中定理 15 的推论，存在 $F_0 \in \mathscr{F}$ 满足

$$F_0 \supset [F_1 \cap (A_1 \cup \{a\})] \cup [(A_1 \cup \{a\}) \cap F_{a,s_1}] \cup (F_{a,s_1} \cap F_1)$$
$$\supseteq A_1 \cup \{a\} \cup \{s_1\}$$

于是 $|F_0| \geqslant h + 1$，这与 $h = r(H)$ 相矛盾。

3. 由上可知 $r(A) = h - 1$，故任一最大独立集 $F$ 满足 $|F \cap S_1| = 1$。

由 $A$ 诱导出的子拟阵，其秩为 $h - 1$。考察它的最大强独立集 $S_2$，如同上面的证明有 $|F \cap S_2| = 1$。

重复这一过程，可得 $E$ 的一个分划 $S_1, S_2, \cdots, S_h$，它具有对 $M$ 中的最大独立集 $F$ 满足

$$|F \cap S_i| = 1 \qquad (i = 1,2,\cdots,h)$$

4. 反之，每个满足上面不等式的集 $F$ 中的点对均相邻。又由于拟阵是保形的且秩为 $h$，故它是一个最大独立集。

因此 $\mathscr{F}$ 是定理中所描述的形式。

令 $\mathscr{A} = (A_1, A_2, \cdots, A_q) = (A_i | i \in Q)$ 是 $E$ 的子集簇。$\mathscr{A}$ 的不同代表系是满足如下条件的 $E$ 中集合 $(a(i) | i \in Q)$：

(1) $i \neq j \Rightarrow a(i) \neq a(j)$

(2) $a(i) \in A_i \qquad (i = 1,2,\cdots,q)$

点 $a(i)$ 是 $A_i$ 的代表。显然一个不同代表系定义了一个基数为 $q$ 的横贯。反之不成立。

若考察二部图 $(Q, E; \Gamma)$ 且满足 $e \in \Gamma(i)$，若 $e \in A_i$。一个不同代表系是一个 $Q$ 到 $E$ 中的匹配的象。

若 $J \subset Q$，令 $A(J) = \bigcup_{j \in J} A_j$。由 König 定理，一个存在不同代表系的充要条件是：

$$|A(J)| \geqslant |J| \qquad (\forall J \subset Q)$$

下面的定理推广了上述结果。

**定理 3** (Perfect [1969]) 令 $M = (E, \mathscr{F})$ 是秩为 $r(E)$ 的拟阵，又令 $k \leqslant r(E)$ 是整数和 $\mathscr{A} = (A_1, A_2, \cdots, A_q) = (A_i | i \in Q)$ 是 $E$ 的 $q$ 个子集簇，则存在独立集

$$F = \{a(i) | a(i) \in A_i, \forall i \in K, K \subset Q, |K| = k\}$$

的充要条件是：

$$r(A(J)) \geq |J| + k - q \qquad (\forall J \subset Q)$$

证　1. 若存在定理中的独立集 $F$，则有

$$\begin{aligned} r(A(J)) &\geq |F \cap A(J)| \\ &\geq |K \cap J| = |K| + |J| - |K \cup J| \\ &\geq k + |J| - q \end{aligned}$$

故不等式成立。

2. 反之，若不等式成立。考察集簇 $\mathscr{B} = (B_i | i \in Q)$ 满足

$$(1) \begin{cases} B_i \subset A_i & (\forall i \in Q) \\ r(B(J)) \geq |J| + k - q & (\forall J \subset Q) \end{cases}$$

关系 $\mathscr{B} \prec \mathscr{B}'$ 定义为：对一切 $i \in Q$ 有 $B_i \subset B'_i$。于是"$\prec$"是一个序关系。考察关于上述序中的最小集簇 $\mathscr{B} = (B_1, B_2, \cdots, B_q)$。下面将证明对一切 $i$，有 $|B_i| = 1$。

事实上，若 $|B| > 1$，则存在两个点 $b', b'' \in B_1$，且 $b' \neq b''$。令

$$B'_1 = B_1 - \{b'\}$$

$$B''_1 = B_1 - \{b''\}$$

$$B'_i = B''_i = B_i \qquad (若\ i \neq 1)$$

由 $\mathscr{B}$ 的极小性，存在两个子集 $I, J \subset Q$ 满足

$$r(B'(I)) < |I| + k - q$$

$$r(B''(J)) < |J| + k - q$$

于是有

$$r(B'(I)) + r(B''(J)) \leq |I| + |J| + 2(k - q) - 2$$

此外，

$$B'(I) \cup B''(J) = B(I \cup J)$$

$$B'(I) \cap B''(J) \supseteq B(I \cap J - \{1\})$$

由性质 4 可得

$$\begin{aligned} r(B'(I)) + r(B''(J)) &\geq r(B'(I) \cup B''(J)) + r(B'(I) \cap B''(J)) \\ &\geq r(B(I \cup J)) + r(B(I \cap J - \{1\})) \\ &\geq |I \cup J| + |I \cap J - \{1\}| + 2(k - q) \\ &\geq |I| + |J| + 2(k - q) - 1 \end{aligned}$$

矛盾。故 $\mathscr{B} = (\{b_i\} | i \in Q)$。取 $B = \{b_i | i \in Q\}$，由(1)，有

$$r(B) = r(B(Q)) \geq |Q| + k - q = k$$

故存在集 $K \subset Q$ 且 $|K| = k$ 和独立集 $F = \{b_i | i \in K\} \subset B$ 满足

$$b_i \in A_i \qquad (\forall i \in K)$$

由上面定理，立即可得著名的 Rado 的定理。

**定理 4** (Rado [1942]) 若 $M=(E,\mathscr{F})$ 是一个拟阵，$E$ 的子集簇 $\mathscr{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_q)$ 含有不同代表系的独立集当且仅当

$$r(A(J))\geqslant|J|\qquad(\forall J\subset Q)$$

事实上，令定理 3 中的 $k=q$ 即得结论。

**推论 1** 两个集簇 $\mathscr{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_q)$ 和 $\mathscr{B}=(B_1,B_2,\cdots,B_q)$ 含有公共的不同代表系当且仅当

$$|A(J)\cap B(K)|\geqslant|J|+|K|-q\qquad(\forall J,K\subset Q)$$

**证** 事实上，考察如例 6 中定义的集簇 $\mathscr{B}$ 中的横贯拟阵，它的秩为

$$r(S)=q+\min_{K\subset Q}(|B(K)\cap S|-|K|)$$

在 $\mathscr{A}$ 中存在 $M$ 中是独立集的横贯集当且仅当对任给 $J\subset Q$，有

$$r(A(J))=q+\min_{K\subset Q}(|A(J)\cap B(K)|-|K|)\geqslant|J|$$

即得推论中的条件。

**推论 2** 若 $\mathscr{C}=(C_1,C_2,\cdots,C_p)$ 是 $E$ 的一个分划，又若 $c_i$ $(i\in\{1,2,\cdots,p\})$ 是一组满足 $0\leqslant c_i\leqslant|C_i|$ 的整数。集簇 $\mathscr{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_q)$ 有一个对一切 $i$ 满足 $|T\cap C_i|\leqslant c_i$ 的不同代表系 $T$ 当且仅当

$$\sum_{i=1}^{p}\min\{c_i,|A(J)\cap C_i|\}\geqslant|J|\qquad(J\subset Q)$$

**证** 事实上，考虑例 7 中定义的拟阵 $M$，它由如下子集 $F\subset E$ 对一切 $i$ 满足 $|F\cap C_i|\leqslant c_i$ 构成，其秩为

$$r(S)=\sum_{i=1}^{p}\min\{c_i,|S\cap C_i|\}$$

存在 $\mathscr{A}$ 的不同代表系且为 $M$ 中独立集当且仅当对任给 $J\subset Q$，有

$$r(A(J))=\sum_{i=1}^{p}\min\{c_i,|A(J)\cap C_i|\}\geqslant|J|$$

在此重述图中的性质(见 Graphs，第 7 章，定理 6 的推论)：存在集簇 $\mathscr{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_q)$ 的不同代表系且包含 $B\subset E$ 的充要条件是：

$$\min\{|A(J)\cup B|,q-|B-A(J)|\}\geqslant|J|\qquad(\forall J\subset Q)$$

这一结果将被推广到拟阵中。首先需要下面引理。

**引理** 令 $M=(E,\mathscr{F})$ 是秩为 $r$ 的拟阵，令 $B\in\mathscr{F},q\geqslant|B|$，则集簇

$$\mathscr{F}_{B,q}=\{F\mid F\subset E,F\cup B\in\mathscr{F},|F\cup B|\leqslant q\}$$

定义一个 $E$ 上的拟阵，它的秩为

$$r_{B,q}(S)=\min\{r(S\cap B),q\}-|B-S|$$

**证** 令 $S\subset E,S_0\in\mathscr{F}_{B,q}$ 是 $S$ 的一个子集。每个集 $F$ 有

(1) $F\in\mathscr{F}_{B,q}$

(2) $S_0 \subset F \subset S$

显然满足

$$|F| \leqslant \min\{r(S \cup B), q\} - |B - S|$$

下面剩下要证明的是等式成立。

$M$ 中独立集$B \cup S_0$是含在$B \cup S$的一个独立集$F'$中且满足$|F'| = r(S \cup B)$。令$F''$是一个独立集且满足

$$B \cup S_0 \subset F'' \subset F'$$

$$|F''| = \min\{r(S \cup B), q\}$$

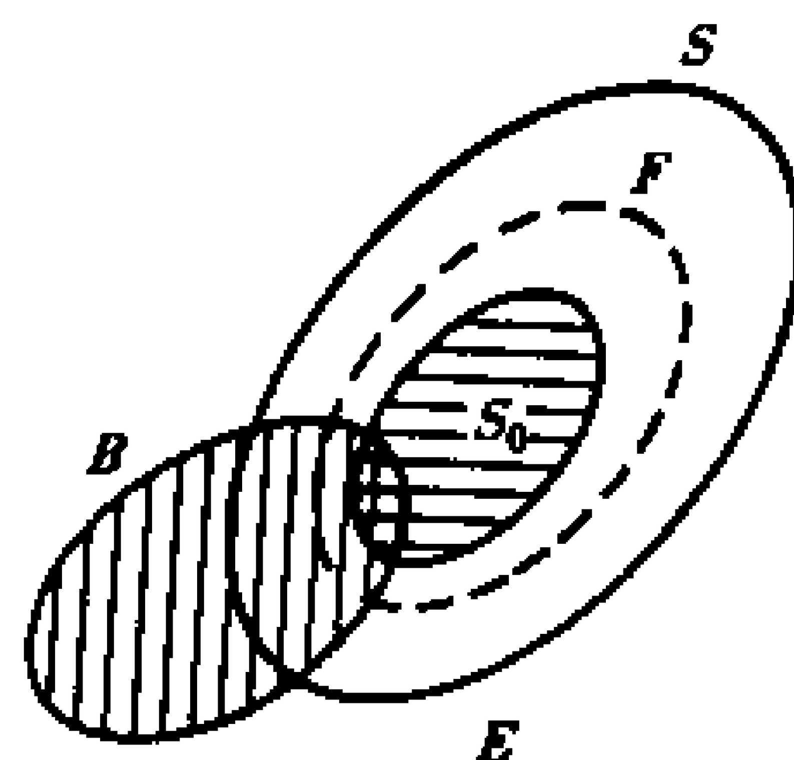


图 1

的独立集，于是$F = F'' \cap S$满足(1)和(2)，且

$$|F| = \min\{r(S \cup B), q\} - |B - S|$$

**定理 5** (Las Vergnas [1969])　令$M = (E, \mathscr{F})$是秩为$r$的一个拟阵，又令$B \in \mathscr{F}$, $q \geqslant |B|$，则$E$的子集簇$\mathscr{A} = (A_1, A_2, \cdots, A_q)$具有包含$B$的独立集的不同代表系当且仅当

$$\min\{r(A(J) \cup B), q\} - |A(J) - B| \geqslant |J| \quad (\forall J \subset Q)$$

**证**　考察由集簇$\mathscr{F}_{B,q} = \{F | F \subset E, F \cup B \in \mathscr{F}, |F \cup B| \leqslant q\}$定义的$E$上的拟阵。

若存在$\mathscr{A}$中的不同代表系$T$满足$T \in \mathscr{F}, B \subset T$，则$|T| = q$。所以$T \in \mathscr{F}_{B,q}$。

反之，若存在$\mathscr{A}$中的不同代表系$T \in \mathscr{F}_{B,q}$，则

$$T \cup B \in \mathscr{F}, \quad |T \cup B| \leqslant q, \quad |T| = q$$

故有

$$T \in \mathscr{F}, \quad B \subset T$$

于是由定理 4 知，存在满足上面陈述条件的$T$当且仅当拟阵$(E, \mathscr{F}_{B,q})$的秩$r_{B,q}$满足

$$r_{B,q}(A(J)) \geqslant |J| \quad (\forall J \subset Q)$$

或

$$\min\{r(A(J) \cup B), q\} - |B - A(J)| \geqslant |T| \quad (\forall J \subset Q)$$

令$M = (E, \mathscr{F})$是在$E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$上的一个拟阵。考虑一个$E$到$\bar{E}$的映射$\Phi$，$M$在$\Phi$下的象构成一个超图$\overline{M} = (\bar{E}, \bar{\mathscr{F}})$，其中

$$\bar{\mathscr{F}} = (\Phi(F) | F \in \mathscr{F})$$

下面对此超图加以研究。

**定理 6** (Nash-Williams [1966])　若$\overline{M} = (\bar{E}, \bar{\mathscr{F}})$是在$E$到$\bar{E}$中的映射$\Phi$下拟阵$M = (E, \mathscr{F})$的象构成，则$\overline{M}$是一个拟阵，其秩为

$$\bar{r}(\bar{E}) = \min_{\bar{A} \subset \bar{E}} (r(\Phi^{-1}(\bar{A})) + |\bar{E} - \bar{A}|)$$

证 1. 下面证明：

$$\max_{\bar{F}\in\bar{\mathscr{F}}}|\bar{F}| = \min_{\bar{A}\subset\bar{E}}(r(\Phi^{-1}(\bar{A})) + |\bar{E}-\bar{A}|)$$

显然，$\max_{\bar{F}\in\bar{\mathscr{F}}}|\bar{F}|$ 是集簇 $(\Phi^{-1}(\bar{e}_1),\Phi^{-1}(\bar{e}_2),\cdots,\Phi^{-1}(\bar{e}_m))$ 的部分不同代表系，且为 $M$ 中的基数为 $k$ 的独立集的最大整数 $k$，由定理 3，有

$$\min_{\bar{A}\subset\bar{E}}(r(\Phi^{-1}(\bar{A})) + |\bar{E}-\bar{A}|)\geqslant k$$

从而

$$\max_{\bar{F}\in\bar{\mathscr{F}}}|\bar{F}| = \min_{\bar{A}\subset\bar{E}}(r(\Phi^{-1}(\bar{A})) + |\bar{E}-\bar{A}|)$$

2. 剩下仅需证明在 $\Phi$ 下 $M$ 的象是一个拟阵。

考察映射

$$\Phi: E = \{e_1,e_2,\cdots,e_m\}\rightarrow\bar{E} = \{\bar{e}_2,\bar{e}_3,\cdots,\bar{e}_m\}$$

满足

$$\begin{cases}\Phi(e_1) = \bar{e}_2 & \\ \Phi(e_i) = \bar{e}_i & (若\ i\neq 1)\end{cases}$$

称上述 $\Phi$ 是对 $\{e_1,e_2\}$ 的凝聚映射。由于任何映射均可看成凝聚映射的复合，故下面仅需证明上述凝聚映射 $\Phi$ 下拟阵 $M$ 的象是一个拟阵。考虑一个使得 $\bar{F}_0$ 在 $\bar{\mathscr{F}}$ 中最大的独立集的原象 $F_0\in\mathscr{F}$。下面将证明 $F_0$ 在 $\mathscr{F}$ 中亦为最大。由 1.，存在 $\bar{A}\subset\bar{E}$ 满足

$$|\bar{F}_0| = r(\Phi^{-1}(\bar{A})) + |\bar{E}-\bar{A}|$$

下面简记 $E_0 = E-\{e_1,e_2\}$。不失一般性，可假设 $F_0$ 包含 $\{e_1,e_2\}$，否则 $F_0$ 由 $\Phi$ 知它已是最大。下面证明

$$|F_0| = |\bar{F}_0| = r(E) = r(\Phi^{-1}(\bar{E})) + |\bar{E}-\bar{E}|$$

我们将分三种情况来证明：

**情况 1** $r(E_0) = r(E)$。由于

$$r(E_0)\leqslant r(E-\{e_1\})\leqslant r(E)$$

故有 $r(E-\{e_1\}) = r(E)$。由于 $F_0$ 包含 $e_1$ 和 $e_2$，故有

$$|F_0-\{e_1\}| = r(E)-1 < r(E-\{e_1\})$$

故存在一个最大独立集 $F'_0$，它不包含 $e_1$ 且满足

$$\bar{F}'_0\supset\overline{F_0-\{e_1\}} = \bar{F}_0$$

于是有 $\bar{F}_0 = \bar{F}'_0$，且有

$$|\bar{F}_0| = |\bar{F}'_0| = |F'_0| = r(E) = r(\Phi^{-1}(\bar{E})) + |\bar{E}-\bar{E}|$$

**情况 2** $r(E_0) = r(E)-1$。此时，每一个最大独立集必须含 $e_1$ 或 $e_2$。此外还有

$$|F_0\cap E_0| = |F_0|-2 = r(E)-2 < r(E_0)$$

于是存在点 $a \in E_0$，使得 $(F_0 \cap E_0) \cup \{a\}$ 是基数为 $r(E_0) = r(E) - 1$ 的独立集。令 $F'_0$ 是 $M$ 中包含上面独立集的最大独立集，故它必须含 $e_1$ 和 $e_2$，不妨设为：

$$F'_0 = (F_0 \cup E_0) \cup \{a, e_1\}$$

显然，$\bar{F}'_0 \supset \bar{F}_0$，故有 $\bar{F}_0 = \bar{F}'_0$，且有

$$|\bar{F}'_0| = |\bar{F}_0| = r(E) = r(\Phi^{-1}(\bar{E})) + |\bar{E} - \bar{E}|$$

**情况 3** $r(E_0) = r(E) - 2$。此时，每一最大独立集总含 $e_1$ 和 $e_2$，故有

$$|\bar{F}_0| = |F_0| - 1 = r(E) - 1 = r(E_0) + 1 = r(\Phi^{-1}(\bar{E}_0)) + |\bar{E} - \bar{E}_0|$$

所以对一切情况，$F_0$ 均是 $\mathscr{F}$ 中的最大集。

令 $H^1, H^2, \cdots, H^p$ 是 $X$ 上的超图，其联超图 $H$ 是如下超图

$$H = H^1 \vee H^2 \vee \cdots \vee H^p$$

定义的集簇为

$$H = \{E^1 \cup E^2 \cup \cdots \cup E^p | E^1 \in H^1, E^2 \in H^2, \cdots, E^p \in H^p\}$$

显然 $H$ 是 $X$ 上的超图。

**定理 7** 若 $(E, \mathscr{F}^1), (E, \mathscr{F}^2), \cdots, (E, \mathscr{F}^p)$ 分别是秩为 $r^1, r^2, \cdots, r^p$ 的拟阵，则其联超图是一个拟阵，其秩为

$$\bar{r}(\bar{E}) = \min_{A \subset E}(r^1(A) + \cdots + r^p(A) + |E - A|)$$

**证** 取 $E$ 的 $p$ 个拷贝 $E^1, E^2, \cdots, E^p$。考察映射 $\Phi$，它将 $\bigcup_{i=1}^{p} E^i$ 到 $E$ 使得 $e_k^i \in E^i$ 与 $e_k$ 相对应。显然

$$M = (\bigcup_{i=1}^{p} E^i, \bigvee_{i=1}^{p} \mathscr{F}^i)$$

是一个拟阵，其秩为

$$r(E) = r^1(E^1) + r^2(E^2) + \cdots + r^p(E^p)$$

由定理 6，在映射 $\Phi$ 下，拟阵 $M$ 的象 $\overline{M}$ 仍然是一个拟阵，它恰好是联拟阵 $\bigvee_{i=1}^{p} \mathscr{F}^i$，故其秩为

$$\begin{aligned}\bar{r}(\bar{E}) &= \min_{A \subset E}(r(\Phi^{-1}(A)) + |E - A|) \\ &= \min_{A \subset E}\left(\sum_{i=1}^{p} r^i(A) + |E - A|\right)\end{aligned}$$

**推论 1** (Edmonds [1968], Nash-Williams [1968]) 用拟阵 $M = (E, \mathscr{F})$ 的独立集去覆盖 $E$，所需最小的数目是

$$\rho(M) = \max_{\substack{A \subset E \\ A \neq \Phi}} \left\{ \frac{|A|}{r(A)} \right\}$$

**证** 由定义，$\rho(M)$ 是使得 $k$ 个拟阵 $M$ 的联 $M \vee M \vee \cdots \vee M$ 的秩为 $|E|$ 的最小整数 $k$，或者由定理 7，使得

$$\min_{A \subset E}(kr(A) + |E - A|) = |E|$$

的最小整数 $k$。这等价于

$$\min_{A\subset E}(kr(A)-|A|)=0$$

或

$$kr(A)=|A|\geqslant 0 \qquad (\forall A\subset E)$$

或

$$k\geqslant\frac{|A|}{r(A)} \qquad (\forall A\subset E, A\neq\Phi)$$

故有

$$\rho(M)=\max_{\substack{A\subset E\\A\neq\Phi}}\left\{\frac{|A|}{r(A)}\right\}$$

**推论 2** 若 $M=(E,\mathscr{F})$ 是一个拟阵，$M$ 中两两不交的最大独立集的最大个数 $k_0$ 为

$$k_0=\min_{\substack{A\subset E\\r(A)\neq r(E)}}\left[\frac{|E-A|}{r(E)-r(A)}\right]$$

**证** 事实上，$k_0$ 是使 $k$ 个 $M$ 的联拟阵的秩为 $kr(E)$ 的最大值 $k$，或

$$\min_{A\subset E}(kr(A)+|E-A|)=kr(E)$$

它等价于

$$\min_{A\subset E}(kr(A)-kr(E)+|E-A|)=0$$

或

$$k(r(E)-r(A))\leqslant|E-A| \qquad (\forall A\subset E)$$

故推论中等式成立。

**推论 3** 考察拟阵 $M=(E,\mathscr{F})$ 和一个满足

$$r(E)\geqslant k_1\geqslant k_2\geqslant\cdots\geqslant k_q>0, \qquad \sum_{i=1}^{q}k_i=|E|$$

的整数序列 $k_1,k_2,\cdots,k_q$。令 $k_j^*$ 是上述 $k_i$ 中大于等于 $j$ 的个数，则 $E$ 可以分划成 $q$ 个独立集 $F_1,F_2,\cdots,F_q$ 且满足 $|F_i|=k_i$ $(i=1,2,\cdots,q)$ 当且仅当

$$\sum_{j>r(A)}k_j^*\leqslant|E-A| \qquad (\forall A\subset E)$$

**证** 考虑 $k$- 截口 $M_{(k_i)}$，定义如下：

$$\mathscr{F}_{(k_i)}=\{F|F\in\mathscr{F},|F|\leqslant k_i\}$$

它是一个秩为

$$r^i(A)=\min\{r(A),k_i\}$$

的拟阵，和联拟阵

$$M=\bigvee_{i=1}^{q}M_{(k_i)}$$

的秩为$|E|$。于是

$$\min_{A\subset E}\left(\sum_{i=1}^{q} r^i(A)+|E-A|\right)=|E|$$

即

$$\sum_{i=1}^{q}\min\{r(A),k_i\}+|E-A|\geqslant|E|=\sum_{i=1}^{q}k_i=\sum_{j>0}k^*\ (\forall A\subset E)$$

因此，

$$\sum_{j>0}k_i^*-\sum_{j=1}^{r(A)}k_j^*\leqslant|E-A|\qquad(\forall A\subset E)$$

故推论中不等式成立。

**推论 4**　由秩为 $r$ 的拟阵 $M=(E,\mathscr{F})$ 中的圈构成的超图 $H^M$ 的色数等于

$$\chi(H^M)=\max_{\substack{A\subset E\\ A\neq\Phi}}\left\{\frac{|A|}{r(A)}\right\}$$

**证**　事实上，$F\subset E$ 是独立集当且仅当它不包含圈。又一个分划$(A_1,A_2,\cdots,A_q)$是超图 $H^M$ 的色分划当且仅当 $A_1,A_2,\cdots,A_q$ 均是独立集。于是 $\chi(H^M)=\rho(M)$，再由推论 1 可推得推论中的公式。

由前述的结果立即可得到图中的某些结果。这些结果原来有纯图论的证明，但其证明较为冗长。

**应用 1** (Tutte [1961])　简单连通图 $G=(X,E)$ 的边集中含 $k$ 个两两不交的生成树当且仅当对 $X$ 的任一分划 $\mathscr{P}$，$\mathscr{P}$中不同类之间所连的边数和 $m_G(\mathscr{P})$ 满足：

$$m_G(\mathscr{P})\geqslant k(|\mathscr{P}|-1)$$

**证**　1. 若 $G$ 中存在两两不交的生成树 $H_1,H_2,\cdots,H_k$，则对任一 $\mathscr{P}$，有

$$m_{H_i}(\mathscr{P})\geqslant|\mathscr{P}|-1\qquad(i=1,2,\cdots,k)$$

于是有

$$m_G(\mathscr{P})\geqslant\sum_{i=1}^{k}m_{H_i}(\mathscr{P})\geqslant k(|\mathscr{P}|-1)$$

2. 若上述条件成立。考察拟阵$(E,\mathscr{F})$，其$\mathscr{F}$由图 $G$ 的森林簇$F_1,F_2,\cdots,F_q$构成。令 $M$ 的秩为$r(A)$。若 $A\subset E$，$A$ 在$G$ 中的诱导边子图具有$p$ 个连通分支，它产生 $X$ 的一个分划：

$$\mathscr{P}=(X_1,X_2,\cdots,X_p)$$

于是有

$$r(E)-r(A)=(n-1)-(n-p)=p-1=|\mathscr{P}|-1$$

再由假设条件，有

$$|E-A|\geqslant m_G(\mathscr{P})\geqslant k(|\mathscr{P}|-1)=k(r(E)-r(A))$$

故

$$k \leqslant \min_{\substack{A \subset E \\ r(A) \neq r(E)}} \left[ \frac{|E - A|}{r(E) - r(A)} \right]$$

因此,由定理 7 的推论 2 知,在 $G$ 中存在 $k$ 个两两不交的生成树。

**应用 2** (Nash-Williams [1964]) 简单图 $G = (X, E)$ 的边集可被 $k$ 种颜色着色,使得图中不含单色圈的充要条件是:对任给 $A \subset X$,两个端点均在 $A$ 中的边数 $m_G(A, A)$ 满足

$$m_G(A, A) \leqslant k(|A| - 1)$$

换句话说,由 $G$ 的边集为顶点集,以 $G$ 中的圈为边的超图 $G^C$ 的色数等于

$$\chi(G^C) = \max_{|A| > 1} \left\lceil \frac{m_G(A, A)}{|A| - 1} \right\rceil$$

**证** 1. 若 $G$ 中的边被 $k$ 种颜色 $1, 2, \cdots, k$ 着色。令 $m_i(A, A)$ 为两个端点均在 $A$ 中且着以 $i$ 色的边数。由于上述边生成的是森林,故有

$$m_i(A, A) \leqslant |A| - 1$$

于是

$$m_G(A, A) = m_1(A, A) + m_2(A, A) + \cdots + m_k(A, A) \leqslant k(|A| - 1)$$

2. 反之,若上述不等式成立。考察由 $G$ 中的森林簇构成的拟阵$(E, \mathscr{F})$,且令秩为 $r(A)$。若由 $F$ 在 $G$ 中的诱导边子图具有 $p$ 个连通分支$(X_1, F_1), (X_2, F_2), \cdots, (X_p, F_p)$ 且无孤立点,则

$$kr(F_i) - |F_i| \geqslant k(|X_i| - 1) - m_G(X_i, X_i) \geqslant 0$$

因此

$$kr(F) - |F| = \sum_{i=1}^{k} (kr(F_i) - |F_i|) \geqslant 0$$

或

$$k \geqslant \max_{\substack{F \subset E \\ F \neq \Phi}} \left\lceil \frac{|F|}{r(F)} \right\rceil$$

因此,由推论 4 知,存在用 $k$ 色着 $G$ 的边集,使得 $G$ 中无单色圈的着色。

**应用 3** 若 $G$ 是最大度为 $h$ 的简单图,则可用 $\left\lfloor \frac{h}{2} \right\rfloor + 1$ 种颜色着 $G$ 中的边,使得 $G$ 中不含单色圈。

**证** 事实上,令 $G = (X, E)$,又令 $A \subset X$。若 $|A| > 1$ 且 $a \in A, \bar{A} = A - \{a\}$,则

$$\frac{1}{|A| - 1} m_G(A, A) = \frac{1}{|\bar{A}|}(m_G(\bar{A}, \bar{A}) + m_G(\bar{A}, a))$$

$$\leqslant \frac{1}{|\bar{A}|}\left(|\bar{A}| \cdot \frac{h}{2} + |\bar{A}|\right) = \frac{h}{2} + 1$$

由 Nash-Williams 的定理(应用 2),有

$$\chi(G^C) \leqslant \left\{\frac{h}{2}\right\} + 1$$

于是存在用$\left\{\frac{h}{2}\right\}+1$种颜色着 $G$ 的边集,使得 $G$ 中无单色圈的着色。

# 名 词 索 引

# 常 用 符 号

| | |
|---|---|
| $\mathbf{R}$ | 实数集 |
| $\mathbf{N}$ | 非负整数集 |
| $\emptyset$ | 空集 |
| $\lvert A \rvert$ | 集合 $A$ 的基数 |
| $(\forall x)$ | 对每一个 $x$ |
| $(\exists x)$ | 存在一个 $x$ |
| $a \in A$ | $a$ 是集合 $A$ 的一个元素 |
| $a \notin A$ | $a$ 不是集合 $A$ 的元素 |
| $A \cup B$ | $A$ 和 $B$ 的并 |
| $A \cap B$ | $A$ 和 $B$ 的交 |
| $A - B$ | $A$ 减 $B$(在 $A$ 中但不在 $B$ 中的元素全体) |
| $A \subset B$ | $A$ 是 $B$ 的子集 |
| $A \not\subset B$ | $A$ 不包含在 $B$ 中 |
| $A \times B$ | $A$ 到 $B$ 的笛卡尔积(有序对 $(a,b)$ 的集合,其中 $a \in A, b \in B$) |
| (1)⇒(2) | (1) 蕴含(2) |
| $\binom{p}{q} = \frac{p!}{q!(p-q)!}$ | "$p$ 中选取 $q$" 的二项式系数 |
| $p \equiv q(\mathrm{mod}\ k)$ | 整数 $p$ 关于模 $k$ 同余等于 $q$ |
| $\left[\frac{p}{q}\right]$ | 不超过 $\frac{p}{q}$ 的最大整数 |
| $\left\{\frac{p}{q}\right\}$ | 大于等于 $\frac{p}{q}$ 的最小整数 |
| $(a_{ij})$ | 第 $i$ 行、第 $j$ 列元素是 $a_{ij}$ 的矩阵 |
| $\det(a_{ij})$ | 矩阵 $(a_{ij})$ 对应的行列式 |
| $\log p$ | 对 $p$ 取自然对数 |
| $A^{T}$ | 矩阵 $A$ 的转置矩阵 |

对于图中的一些特殊符号,可参见:C. Berge, Graphs, North Holland, 1985。

# 习题解答

张克民　卜月华

为了节省篇幅，在此不再将各章的题目重复抄一遍，仅仅写出题号加以解答。其次有不少题有多种解法，仅按我们的观点取最好的一种。事先加以说明。

# 第1章　基本概念

1. 令 $G=(X,E)$ 是一个简单图，假如它的对偶 $G^*$ 也是简单图。于是对任意 $v\in X$，有 $d_G(v)=2$。从而 $G$ 是圈的并，它即为所求的条件。

2. 设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 为 $X$ 上的区间超图。

(1) 由 $H$ 的定义，可令 $X$ 的顶点依序排列在线 $L$ 上如下：$x_1,x_2,\cdots,x_n$。再由 $H$ 是简单超图，从而 $H$ 的边互不包含，故可把边 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 依序排列在 $L$ 上。于是，$H$ 的对偶超图 $H^*=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 中的顶点 $e_1,e_2,\cdots,e_m$ 可依序排列在某条线 $L^*$ 上，使 $e_i$ 与 $E_i$ 相对应，$i=1,2,\cdots,m$。因与 $x_i$ 相关联的边在 $L$ 上依次相邻，不妨设为 $E_k,E_{k+1},\cdots,E_t$，故 $X_i$ 中含有顶点 $e_k,e_{k+1},\cdots,e_t$ 在 $L^*$ 的一个区间上，从而 $X_i$ 为 $L^*$ 的一个区间，所以 $H^*$ 仍是一个区间超图。

(2) 由子超图的定义，对 $A\subset X$，可假设

$$H_A=(E_j\cap A\mid 1\leqslant j\leqslant m,E_j\cap A\neq\varnothing)$$

因为 $X$ 的顶点依次排列在线 $L$ 上，故 $A$ 中的顶点也依序排列在 $L$ 上。又因为 $E_j$ 为 $L$ 的一个区间(相对于 $X$)，故 $E_j\cap A\neq\varnothing$ 时，边 $E_j\cap A$ 为 $L$ 的一个区间(相对于 $A$)。从而 $H_A$ 仍是一个区间超图。

3. (1) $r(K_n^r)=r$；(2) $r[(K_n^r)^*]=\Delta(K_n^r)=\binom{n-1}{r-1}$。

4. 首先指出在本题所叙述的 Hilton 的结果的条件中，必须加上简单超图这一条件，否则结果不一定成立。

下面由 Hilton 的结果来推导 EKR 定理。设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 为 $X$ 上的 $n$ 阶简单超图，其秩 $r\leqslant\frac{n}{2}$。对任意 $i$，若 $|E_i|=r$，则取 $E'_i=E_i$；若 $|E_i|<r$，则在 $X-E_i$ 中任取 $r-|E_i|$ 个点的子集 $F_i$，令 $E'_i=E_i\cup F_i$。于是，$H'=(E'_1,E'_2,\cdots,E'_m)$ 是 $X$ 上的 $n$ 阶简单 $r$-一致交超图且满足 $m(H')=m(H)$。对 $H'$ 用 Hilton 的结果有

$$m(H)=m(H')\leqslant\binom{n-1}{r-1}$$

故 EKR 定理成立。

5. 设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是简单超图。令 $F_j=X-E_j$，$H'=(E_1,E_2,\cdots,$

$E_m, F_1, F_2, \cdots, F_m$),则 $E_i \cap F_j = \emptyset$ 当且仅当 $i = j$。故 $H'$ 满足定理 6 的条件,从而有

$$\sum_{j=1}^{m}\binom{|E_j|+|F_j|}{|E_j|}^{-1} \leqslant 1$$

即

$$\sum_{E \in H}\binom{n}{|E|}^{-1} \leqslant 1$$

6. 首先由已知条件有:

(1) $E_i \neq \emptyset$,超图 $H$ 的定义,$X - E_i \neq \emptyset$,否则 $E_i \cup E_k = X$;

(2) $E_j \not\subset E_k \ (j \neq k)$,

$E_j \not\subset X - E_k$,否则 $E_j \cap E_k = \emptyset$,

$X - E_k \not\subset E_j$,否则 $E_j \cup E_k = X$,

$X - E_k \not\subset X - E_j$,否则 $E_j \subset E_k$;

(3) $(\bigcup_{j=1}^{m} E_j) \cup (\bigcup_{i=1}^{m}(X - E_i)) = X$。

由(1),(2) 和(3) 知,$H'$ 是一个简单超图。

下面令

$$E'_i = E_i \qquad (i = 1,2,\cdots,m)$$

$$E'_i = X - E_{i-m} \qquad (i = m+1, m+2, \cdots, 2m)$$

$$F'_i = X - E'_i \qquad (i = 1,2,\cdots,2m)$$

于是,超图 $H'' = (E'_1, E'_2, \cdots, E'_{2m}, F'_1, F'_2, \cdots, F'_{2m})$ 满足定理 6 的条件,故有

$$\sum_{j=1}^{2m}\binom{|E'_j|+|F'_j|}{|E'_j|}^{-1} \leqslant 1$$

注意到 $|E'_j| + |F'_j| = n$,故有

$$2m\binom{n}{[n/2]}^{-1} \leqslant \sum_{j=1}^{2m}\binom{n}{|E'_j|}^{-1} \leqslant 1$$

所以有

$$m = m(H) = \frac{1}{2}\binom{n}{[n/2]}$$

令 $X$ 为满足 $|X| = n = 2r$ 的顶点集。令 $H$ 为 $X$ 上的 $r$- 一致超图,满足 $E_i \in H \Leftrightarrow X - E_i \notin H$。易证 $H$ 满足本题条件且 $m(H) = \frac{1}{2}\binom{n}{r} = \frac{1}{2}\binom{n}{[n/2]}$。故本题中不等式可达。

7. 首先指出题中条件(ⅱ)是多余的,它可由条件(ⅰ)推出来。在圆圈上规定

顺时针方向为正方向，沿着正方向每个圈区间有起点和终点。又由于(ⅲ)，$\mathscr{A}$中任两个区间不能有公共起点。于是由(ⅰ)，在圆圈上每一个点至多作为一个圈区间的起点，故有 $m \leqslant n$。

$|\mathscr{A}_k| = n$。事实上易证：若$|\mathscr{A}| = n$，则 $A = \mathscr{A}_n, k > \frac{n}{2}$。

8. 设$\mathscr{A}$中的圈区间排成非降排序$|A_1| \leqslant |A_2| \leqslant \cdots \leqslant |A_m|$，则

$$\frac{n - |A_i| + 1}{|A_i|} \leqslant \frac{n - |A_1| + 1}{|A_1|} \qquad (i \geqslant 2)$$

由(ⅱ)和(ⅲ)知，$A_1 \cap A_i$ 只能有唯一端点与$A_1$端点一致，又由(ⅲ)知，$A_1 \cap A_i$ 均相异，故有 $m \leqslant 2|A_1| - 1$。令 $p$ 为使$|A_k| \leqslant \frac{n}{2}$ 最大的足标 $k$，则 $p \leqslant |A_1|$。当$|A_1| > \frac{n}{2}$ 时，记 $p = 0$。

当 $p = 0$ 时，则由本章习题的第 7 题知，$\sum\limits_{i=1}^{m} p(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{m} 1 = m \leqslant n$。

当 $p > 0$ 时，则

$$\sum_{i=1}^{m} p(A_i) = \sum_{i=1}^{p} \frac{n - |A_i| + 1}{|A_i|} + \sum_{p+1}^{m} 1$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{|A_1|} \frac{n - |A_1| + 1}{|A_1|} + (|A_1| - 1) = n$$

9. 本猜测至今尚未解决。其主要文献有：

[1] Frankl P. Families of Finite Sets Satisfying a Union Condition. *Disc. Math*, 1979, 26(2): 111 ~ 118 (MR#80i:05002)

[2] Daykin David E, Frankl P. Sets of Finite Sets Satisfying Union Condition. *Mathematica*, 1982, 29(1): 128 ~ 134 (MR#84a:05001)

关于这猜测的已知结果：

1) (E.K.R., 1961) 举例说明了 $k = 2, t = 1$ 是一例外；

2) (Katona, 1964) $k = 2, t \neq 1$；

3) (Frankl, 1976) $k = 3, t = 2$；

4) (Frankl, 1979) $k > 2, t < \frac{k \cdot 2^k}{150}$；

5) (Frankl, 1979) $k \geqslant 6, t \leqslant (e + 1)^{-1}(2^{k-1} - k + 1) - 1$。

10. 对 $m(H)$ 用数学归纳法。显然 $m(H) = 1$ 时，命题成立。下面假设对小于 $m = m(H)$ 的所有遗传超图成立。令 $A$ 是$X$中具有形如$A = E \cup F$ 的极大子集，

其中 $E,F\in H$。令

$$\mathscr{B}=\{E\mid E\in H,\text{存在 }F\in H\text{ 使 }E\cup F=A\}$$

由于 $H$ 是遗传超图，所以对任意 $E\in\mathscr{B}$，存在使 $E\cup F=A$ 且 $E\cap F=\emptyset$。从而 $E,F$ 对应在 $\overline{L(H)}$ 中的顶点 $e,f$ 相连。故在 $\overline{L(H)}$ 中，$\mathscr{B}$ 中的边所对应的顶点被一匹配完全覆盖。

若 $H=\mathscr{B}$，则命题成立；

若 $H\neq\mathscr{B}$，则 $H-\mathscr{B}$ 仍然为遗传超图。事实上，设 $E\in H-\mathscr{B}$，$E'\subset E$。若 $E'\notin H-\mathscr{B}$，则 $E'\in\mathscr{B}$。从而存在 $F'\in H$ 使 $E'\cup F'=A$。由 $A$ 的极大性知，有 $E\cup F'=A$，故 $E\in\mathscr{B}$。这与 $E\in H-\mathscr{B}$ 相矛盾。由于 $m(H-\mathscr{B})<m=m(H)$，由归纳假设，$\overline{L(H-\mathscr{B})}$ 存在一个匹配覆盖除奇分支中一顶点以外的所有顶点。故命题成立。

11. 令 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的超图。又令 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 从左到右排列在线 $L$ 上。考察 $H^*=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$。设 $J\subset\{1,2,\cdots,n\}$，$\{X_j\mid j\in J\}$ 是 $H^*$ 中的交子簇，即对任意的 $j,k\in J$，$X_j\cap X_k\neq\emptyset$。令 $j_0=\min\limits_{j\in J}\{j\}$，$k_0=\max\limits_{j\in J}\{j\}$，则 $X_{j_0}\cap X_{k_0}\neq\emptyset$。从而存在 $t\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得 $e_t\in X_{j_0}$ 和 $e_t\in X_{k_0}$，即 $\{x_{j_0},x_{k_0}\}\subset E_t$。由于 $H$ 是区间超图，故对任意 $j\in J$，有 $x_j\in E_t$。所以 $e_t\in\bigcap\limits_{j\in J}X_j$。故 $H^*$ 具有 Hell 性质。

12. 令 $E_i=\{x\in\mathbf{N}\mid x\equiv a_i \bmod m_i\}$ $(i=1,2,\cdots,k)$，$X=\bigcup\limits_{i=1}^{k}E_i$，则 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_k)$ 为 $X$ 上的超图。因而由初等数论知

$$a_i\equiv a_j \bmod g.c.d.(m_i,m_j)\Leftrightarrow E_i\cap E_j\neq\emptyset$$

故方程组有解，$\bigcap\limits_{i=1}^{k}E_i\neq\emptyset\Leftrightarrow E_i\cap E_j\neq\emptyset$。即问题等价于 $H$ 具有 Helly 性质。

下面用定理 10 的推论来证明，为方便起见，记

$$(a,b)=g.c.d.(a,b),\qquad [a,b]=l.c.m.(a,b)$$

对任意 $A=\{n_1,n_2,n_3\}\subset X$，$J=\{j\mid |E_j\cap A|\geqslant 2,j=1,2,\cdots,k\}$。$\forall j\in J$，$E_j$ 必含下列某个 $E'_i$ $(i=1,2,3)$：

$$E'_1=\{n_1+r(n_2-n_1)>0\mid r\in\mathbf{N}\}$$

$$E'_2=\{n_1+r(n_3-n_1)>0\mid r\in\mathbf{N}\}$$

$$E'_3=\{n_2+r(n_3-n_2)>0\mid r\in\mathbf{N}\}$$

于是要证 $\bigcap\limits_{j\in J}E_j\neq\emptyset$，只需证明 $\bigcap\limits_{j=1}^{3}E'_j\neq\emptyset$。而由数论知，

$$E'_1\cap E'_2\supset F_1=\{n_1+k[n_3-n_1,n_2-n_1]\mid k\in\mathbf{N}\}$$

$$E'_2 \cap E'_3 \supset F_3 = \{n_3 + k[n_3 - n_1, n_3 - n_2] \mid k \in \mathbf{N}\}$$

故要证 $\bigcap_{j=1}^{3} E'_j \neq \emptyset$，只需证明 $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$。又由数论知，

$$F_1 \cap F_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow ([n_3 - n_1, n_3 - n_2], [n_3 - n_1, n_2 - n_1]) \mid (n_3 - n_1)$$

而后者恒成立。到此我们证明了 $H$ 具有 Helly 性质。命题得证。

13. 因简单图两条以上的边交非空必交于一点，或者由定理 10 来看，满足 $|E_j \cap A| \geqslant k \geqslant 3$ 的边不存在，故结论自然成立。所以本题无论按定义或按定理 10 均是平凡的。

14. 应用 Frankl 的引理，可假设 $H$ 满足

$$F \in [H - H(x_1)]_{r-1} \quad \Rightarrow \quad F \cup \{x_1\} \in H \qquad (*)$$

下面如同定理 14 中的证明一样，对 $r$ 和 $m$ 作双重归纳。当 $r = 2, m = \frac{1}{2}x(x-1)$ 时，$m([H]_1) \geqslant x$；当 $m = \binom{x}{r} = 1$ 时，即 $x = r$ 时，$m([H]_{r-1}) \geqslant \binom{r}{r-1} = r$，结论成立。

对一般情形，令 $H_1 = (E - \{x_1\} \mid E \in H(x_1))$。先证明 $m(H_1) \geqslant \binom{x-1}{r-1}$。若不成立，即 $m(H_1) < \binom{x-1}{r-1}$，则

$$m(H - H(x_1)) = m(H) - m(H_1) > \binom{x}{r} - \binom{x-1}{r-1} = \binom{x-1}{r}$$

由归纳假设有 $m([H - H(x_1)]_{r-1}) \geqslant \binom{x-1}{r-1}$。又由（$*$）有

$$m(H_1) \geqslant m([H - H(x_1)]_{r-1}) \geqslant \binom{x-1}{r-1}$$

矛盾。故必有 $m(H_1) \geqslant \binom{x-1}{r-1}$。下面应用归纳假设有

$$m([H_1]_{r-2}) \geqslant \binom{x-1}{r-1}$$

于是有

$$m([H]_{r-1}) \geqslant m(H_1) + m([H_1]_{r-2}) \geqslant \binom{x-1}{r-1} + \binom{x-1}{r-2} = \binom{x}{r-1}$$

15. 当 $m = 2,3$ 时，易直接验证 $d(2) = 2, d(3) = 3$ 成立。对 $m \geqslant 4$，当 $G$ 无孤立点时，由定理 18 知，满足题中性质的 $X$，其 $|X| \leqslant \left[\frac{m^2}{2}\right]$，且上界可达。当 $G$ 中

含 $k$ 个孤立点 $e_1,e_2,\cdots,e_k$ 时,将它们从 $G$ 中除去得图 $G'$。由上讨论知,存在满足题中要求的 $X'$,且 $|X'|\leqslant\left[\left(\frac{m-k}{2}\right)^2\right]$。取与 $X'$ 相异与 $e_i$ 相对应的顶点 $x_i$,令 $E_i=\{x_i\}\ (i=1,2,\cdots,k)$。于是 $X'\cup\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ 可作为满足题中要求的 $X$,且

$$|X|=|X'|+k=\left[\left(\frac{m-k}{2}\right)^2\right]+k\leqslant\left[\frac{m^2}{2}\right]$$

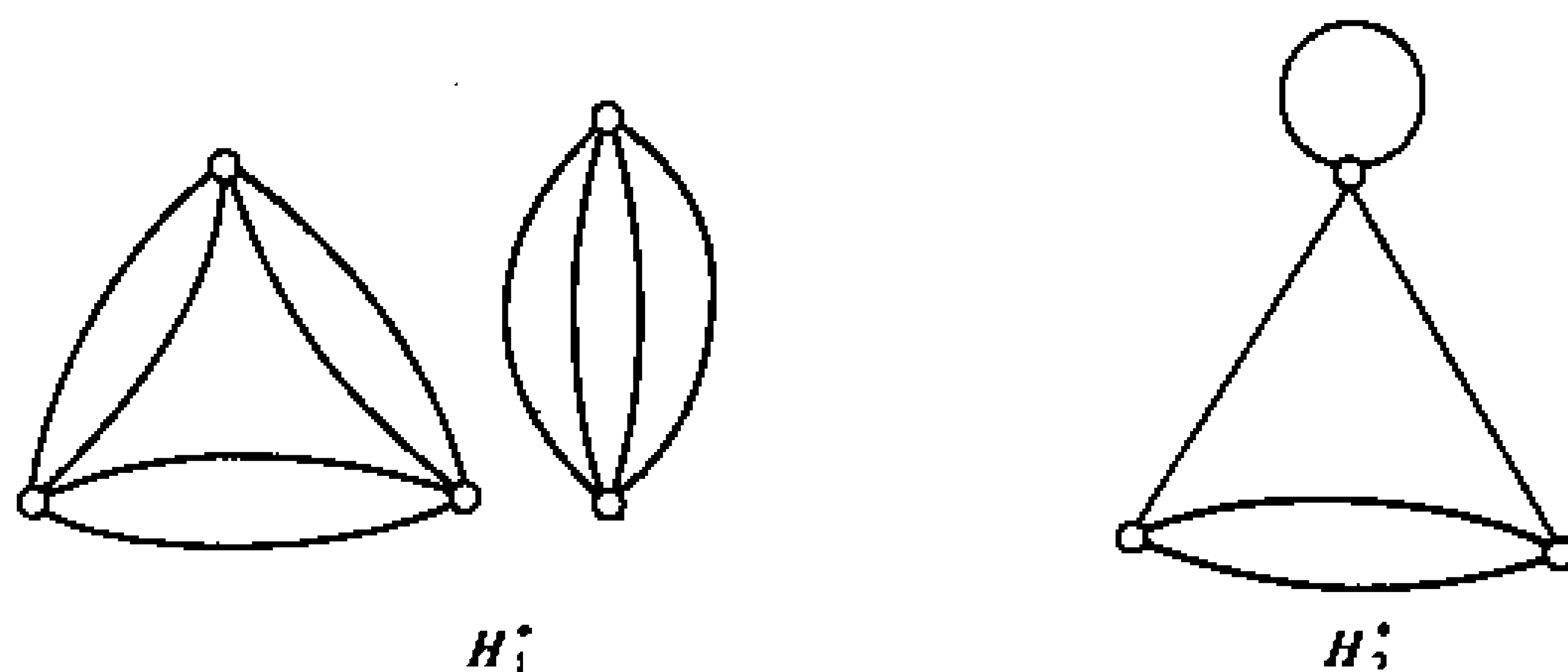
故

$$d(m)=\left[\frac{m^2}{2}\right]\qquad(m\geqslant 4)$$

# 第 2 章　横贯与匹配

1. 本题结论不成立。例如 $H$ 是一个星或 $H$ 是一个 $m$ 条两两不相交的边构成的超图,均可作为它的反例。

2.



$H_1^*$　　　　$H_2^*$

$H_1^*$ 的对偶超图 $H_1$ 为 $r=4,n=10,m=5$ 的一个 4- 一致超图。其 $\tau(H_1)=\rho(H_1^*)=3=\left[\frac{2}{3}\left[\frac{2n}{r}\right]\right]$。故当 $r$ 为偶数时,上界可达。

$H_2^*$ 的对偶超图 $H_2$ 为 $r=3,n=5,m=3$ 的一个 3- 一致超图,其 $\tau(H_2)=\rho(H_2^*)=2=\left[\frac{4n}{3r+1}\right]$。故当 $r$ 为奇数时,上界可达。

对于一般的 $r$,这里不再举例,它均有达到上界的极超图。详细情况,读者可参看 Sterboul F. Sur le nombre transversal des hypergraph uniformes. *Disc. Math*, 1978,22:91 ~ 96 的原始论文。

3. 分两种情况说明:

(1) $n=2m$。令 $X=\{x_0,x_1,\cdots,x_{2m-1}\}$,对 $0\leqslant a\leqslant 2m-1$,令

$$E_a = \{x_a, x_{a+1}, \cdots, x_{a+m}\}$$

其中下标对$2m$取模。设$H=(E_0,E_1,\cdots,E_{2m+1})$,则对任意$a$ $(0\leqslant a\leqslant 2m-1)$,$X_a$恰好含在三条边$E_{a-1},E_a,E_{a+m}$中,从而$H$是一个3-一致3-正则超图。任取$H$的一个横贯$S$,考察点对$\{x_0,x_m\}$,$\{x_1,x_{m+1}\}$,$\cdots$,$\{x_{m-1},x_{2m-1}\}$。若存在某个$a$ $(0\leqslant a\leqslant 2m-1)$使得$x_a,x_{a+m}\notin S$,则由$E_a=\{x_a,x_{a+1},x_{a+m}\}$,$E_{a+m}=\{x_{a+m},x_{a+m+1},x_a\}$及$S$为横贯知,$x_{a+1},x_{a+m+1}\in S$。故$|S|\geqslant m$。又$\tau(H)\leqslant m$,所以$\tau(H)=m=\left[\frac{n}{2}\right]$。

(2) $n=2m+1$。令$X=\{x_0,x_1,\cdots,x_{2m-1},y\}$,对$1\leqslant a\leqslant 2m-2$,令$E_a=\{x_a,x_{a+1},x_{a+m}\}$,又设$E_{2m-1}=\{y,x_0,x_{m-1}\}$,$E_0=\{y,x_1,x_m\}$,$E_y=\{x_{2m-1},x_0,y\}$。设$H=(E_0,E_1,\cdots,E_{2m+1},E_y)$,则易见$H$是3-一致3-正则超图。设$S$是$H$的一个横贯,考察点集$\{x_1,x_{m+1}\}$,$\{x_2,x_{m+2}\}$,$\cdots$,$\{x_{m-1},x_{2m-1}\}$,$\{x_m,x_0,y\}$。与(1)类似可证:对$a$ $(1\leqslant a\leqslant m-2)$,若$x_a,x_{a+m}\notin S$,则$x_{a+1},x_{a+m+1}\in S$。另外,若$x_{m-1},x_{2m-1}\notin S$,则由$E_{m-1}=\{x_{m-1},x_m,x_{2m-1}\}$,$E_{2m-1}=\{y,x_0,x_{m-1}\}$及$S$为横贯知,$x_m\in S$且$x_0$或$y\in S$。若$y,x_0,x_m\notin S$,则由$E_0=\{y,x_1,x_m\}$,$E_m=\{x_m,x_{m+1},x_0\}$及$S$为横贯知,$x_1,x_{m+1}\in S$。所以$|S|\geqslant m$,又$\tau(H)\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]=m$,故$\tau(H)=m=\left[\frac{n}{2}\right]$。

4. 令$G=(T,S;\Gamma)$是一个二部图,其$T$中点与$S$中点相邻当且仅当此两点属于$H$中的某一条边中,所以$G$的边也是$[H]_2$的边。下面仅需证明$G$有饱和$T$中所有点的匹配即可。任取$A\subset T$,令$Y=A\cup\Gamma_G(A)$。考察部分超图$H_1=H\mid Y=(E\mid E\in H,E\subset Y)$,由条件知,$H_1$有一横贯$T_1$,使得$|T_1|\leqslant|Y|/2=\frac{1}{2}|A\cup\Gamma_G(A)|$。令$T_0=T_1\cup(T-A)$。若存在$E\in H$使得$T_0\cap E=\varnothing$,则有$(T-A)\cap E=\varnothing$。再由$G$的定义知$(S-\Gamma_G(A))\cap E=\varnothing$,从而$E\subset A\cup\Gamma_G(A)=Y$。由于$T_1$是$H_1$的横贯,故$E\cap T_1\neq\varnothing$,从而$E\cap T_0\neq\varnothing$,矛盾。故对任意$E\in H$,均有$T_0\cap E\neq\varnothing$,即$T_0$为$H$的一个横贯。因$T$为$H$的最小横贯,所以有

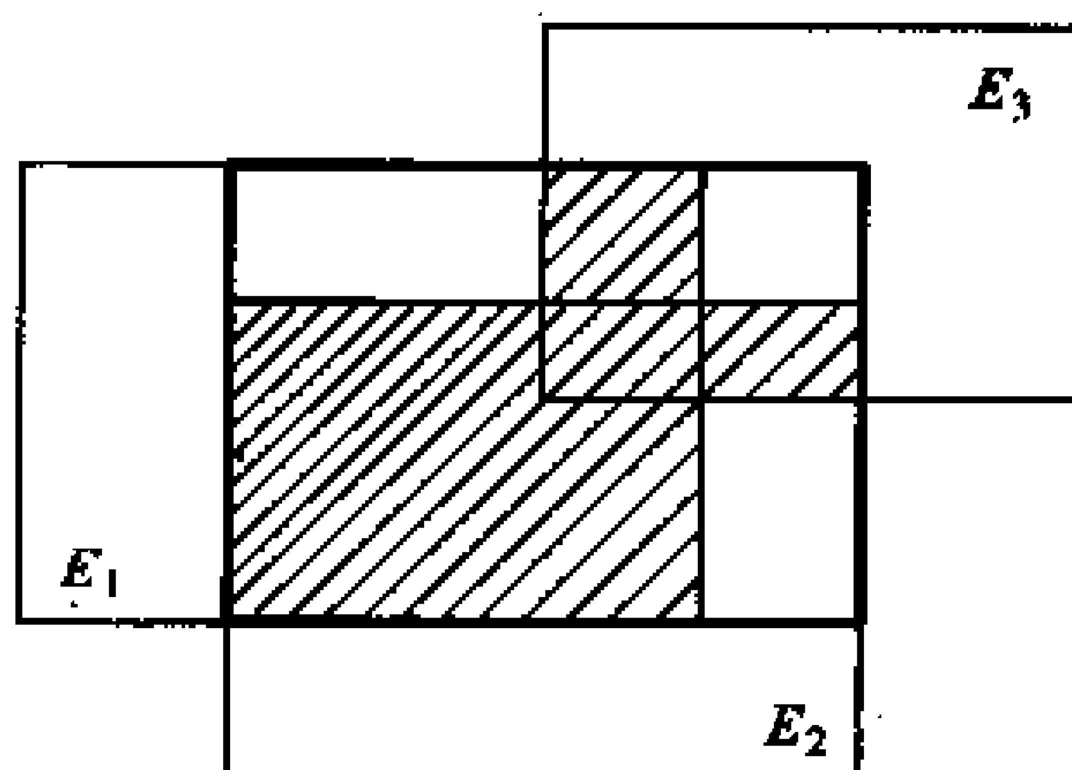
$$\begin{aligned} t=|T|\leqslant|T_0| &= |T\cup(T-A)|\leqslant|T_1|+|T-A| \\ &\leqslant\frac{1}{2}|A\cup\Gamma_G(A)|+|T-A| \\ &=\frac{1}{2}(|A|+|\Gamma_G(A)|)+t-|A| \end{aligned}$$

故$|\Gamma_G(A)|\geqslant|A|$。由König定理,得$G$中有饱和$T$中所有顶点的匹配。

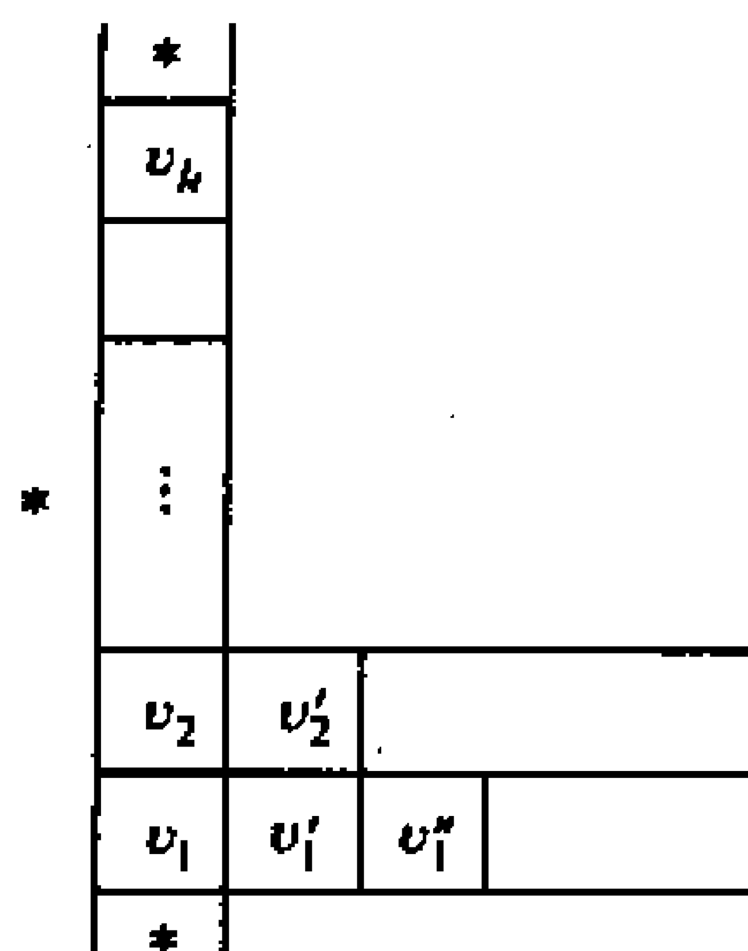
5. (1) 由第1章定理15的推论知,要证 $P$ 是保形的,只需证对任给的 $E_1,E_2,E_3\in P\Rightarrow$ 存在 $E\in P$,使得 $(E_1\cap E_2)\cup(E_2\cap E_3)\cup(E_3\cap E_1)\subset E$ 即可。现对情况最为复杂的情形:$E_1\cap E_2\cap E_3\neq\varnothing$ 加以证明,其余情形则可类似证明从而略。

如图(a)所示,其中打斜线的部分恰表示

$$A=(E_1\cap E_2)\cup(E_2\cap E_3)\cup(E_3\cap E_1)$$




(a)




(b)

而 $P$ 中每边均为剪残棋盘中的极大矩形,故图中粗实线所示包含 $A$ 的矩形 $E_0$ 必然全部落在剪残棋盘中。于是在剪残棋盘中存在一极大矩形 $E\supset E_0\supset A$。由 $P$ 的定义有 $E\in P$,故 $P$ 是保形的。

(2) 考察剪残棋盘的左边界,如图(b)所示。图中打"*"处不属于该剪残棋盘。图(b)的假设不失一般性。在极端情况下,上下两个"*"就是棋盘的上、下边界。用反证法,于是 $d_P(v_1)>1$。从而必定存在另一个与 $v_1$ 相邻的小正方形 $v'_1$,$v'_1$ 属于剪残棋盘。同理,由 $d_P(v_2)>1$ 知,存在剪残棋盘的另一个与 $v_2$ 相邻的小正方形 $v'_2$。如此一直下去,由 $d_P(v_k)>1$ 知,存在剪残棋盘的另一个与 $v_k$ 相邻的小正方形 $v'_k$。但这样一来,$\{v_1,v_2,\cdots,v_k,v'_1,v'_2,\cdots,v'_k\}$ 属于同一条边。故再由 $d_P(v_1)>1$ 知,存在剪残棋盘的另一个与 $v'_1$ 相邻的小正方形 $v''_1,\cdots$,这一过程一直可进行下去,直到棋盘右边界为止。但此时 $v_1$ 仍仅在一条边上,矛盾。故棋盘的边界上必有一点度为1。

(3) 令 $P_0=P$,由(2),存在 $x_1$,使得 $d_{P_0}(x_1)=1,x_1\in E_1$;令

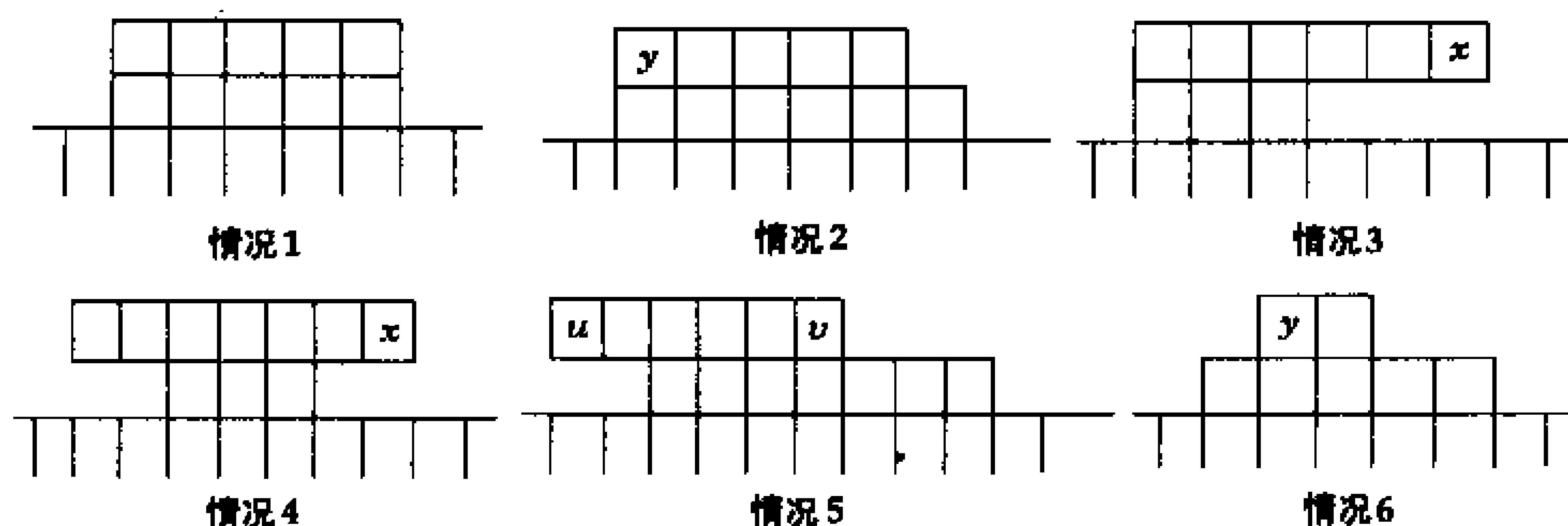
$$P_1=P_0-\{x\mid x\in E_1,x\notin P_0\text{ 中其他边}\}$$

由(2),存在 $x_2$,使得 $d_{P_1}(x_2)=1$,且 $x_2\in E_2$;…;令

$$P_{i+1}=P_i-\{x\mid x\in E_{i+1},x\notin P_i\text{ 中其他边}\}$$

由(2),存在 $x_{i+2}$,使得 $d_{P_{i+2}}(x_{i+2})=1$,且 $x_{i+2}\in E_{i+2}$;…。注意到 $P_i$ 到 $P_{i+1}$ 时,$E_{i+1}\notin P_{i+1}$,故这过程直到 $P$ 中的边取完而终止,即存在 $x_1,x_2,\cdots,x_m$,使得 $x_i\in E_i$ 对 $i=1,2,\cdots,m$ 成立。

6. 对半凸棋盘 $X_{l\times m}$ 的行数进行归纳证明。当 $l=1$ 时，$X_{1\times m}$ 上超图 $P_1$ 仅有一条边。取 $X_{1\times m}$ 中的任一点构成 $S_1$ 即可，假设行数小于 $l$ 时结论均成立。设 $X_{l\times m}$ ($l\geqslant 2$) 是任一个 $l$ 行的半凸棋盘，$P_l$ 为定义在 $X_{l\times m}$ 上的超图。令 $X_{(l-1)\times m}$ 是去掉 $X_{l\times m}$ 中第一行后得到的半凸棋盘，$P_{l-1}$ 为相应的超图。由归纳假设，$P_{l-1}$ 具有强独立的横贯集 $S_{l-1}$。在 $S_{l-1}$ 基础上构造 $P_l$ 的强独立的横贯集 $S_l$。事实上，由 $X_{l\times m}$ 的半凸性，$X_{l\times m}$ 的第一行与第二行小方格之间的关系必为下列 6 种情况之一，见下图。



情况1　情况2　情况3　情况4　情况5　情况6

在情况 1 中，$P_l$ 的边不增加，令 $S_l=S_{l-1}$；在情况 3 和情况 4 中，$P_l$ 比 $P_{l-1}$ 增加一条边，令 $S_l=S_{l-1}\cup\{x\}$；在情况 2 和情况 6 中，$P_l$ 比 $P_{l-1}$ 至多增加一条边。当不增加时，令 $S_l=S_{l-1}$，否则令 $S_l=S_{l-1}\cup\{y\}$；在情况 5 中，$P_l$ 比 $P_{l-1}$ 至少增加一条边，至多增加两条边。当增加一条边时，令 $S_l=S_{l-1}\cup\{u\}$；当增加两条边时，令 $S_l=S_{l-1}\cup\{v\}$，其中 $x,y,u,v$ 均已在相应的图中标出。易见构成的 $S_l$ 均满足题中的要求。

7. $n$ 个人记为 $X=\{1,2,\cdots,n\}$，第 $i$ 个人的朋友组成的集合记为 $E_i$，$E_i=\varnothing$，令 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_n)$ 是 $X$ 上的超图。由条件知当 $i\neq j$，$|E_i\cap E_j|=1$。且有 $E_i\neq E_j$，否则若 $E_{i_0}=E_{j_0}$，于是由条件知，$1=|E_{i_0}\cap E_{j_0}|=|E_{i_0}|=|E_{j_0}|$。令 $E_{i_0}=\{k\}$，则 $E_{i_0}\cap E_k=\varnothing$，矛盾。故 $H$ 满足定理 8 中推论的条件，且 $m(H)=n(H)$。所以 $H$ 仅可能是下面三种情况之一：

(ⅰ) $H$ 是秩 $r\geqslant 3$ 的射影平面；

(ⅱ) $H=(\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\cdots,\{1,n\})$，$n\geqslant 1$；

(ⅲ) $H=(\{1,2\},\{1,3\},\cdots,\{1,n\},\{2,3,\cdots,n\})$，$n\geqslant 3$。

首先证明(ⅰ)不可能发生。用反证法。若 $H$ 是 $r$-阶射影平面，则其顶点集 $X$ 满足 $|X|=r^2-r+1$ ($r\geqslant 3$)，且每个顶点恰在 $r$ 条边上。这种 $r$-阶射影平面的存在性可转化为在 $X$ 上 $r$-正则简单图 $G$，且满足对任意 $u,v\in X$，有 $|N_G(u)\cap N_G(v)|=1$ 的存在性。

任取一顶点 $x\in X$，令 $N_G(x)=\{y_1,y_2,\cdots,y_r\}$。由于

$$|N_G(x)\cap N_G(y_i)|=1$$

故 $G[\{y_1,y_2,\cdots,y_r\}]$ 是一个 1- 正则图。又因为 $r\geqslant 3$，故 $A_1=N_G(y_1)\setminus\{y_1,y_2,\cdots,y_r,x\}\neq\varnothing$，令 $z\in A_1$，于是有

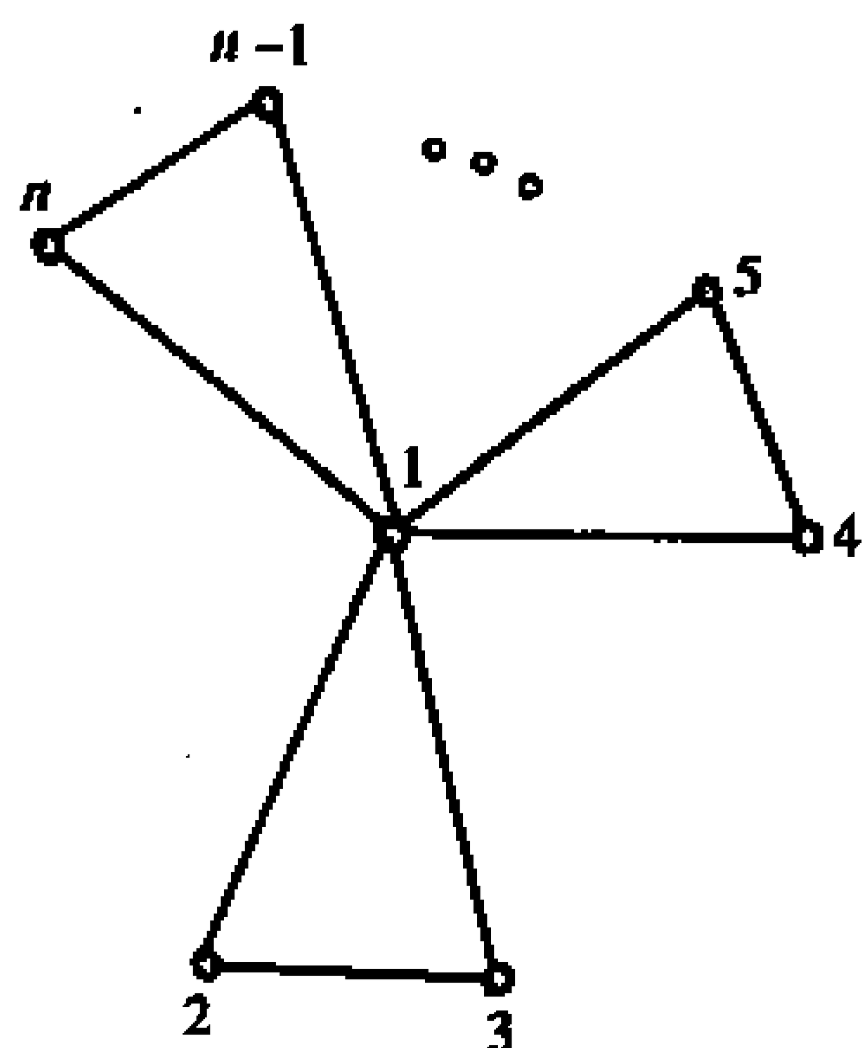
$$|N_G(z)\cap N_G(x)|=0$$

这与 $|N_G(z)\cap N_G(x)|=1$ 相矛盾。所以图 $G$ 不存在，从而知 $H$ 不可能是 $r$- 阶射影平面。

对(ⅱ)，注意到 $i\notin E_i$，即每个人的朋友集合中不能包含它自己。但在(ⅱ)中的"1"，在 $H$ 中没有它的朋友，故 $H$ 不可能是(ⅱ)中的超图。

所以 $H$ 一定是(ⅲ)中定义的超图。其中"1"的朋友集合为 $\{2,3,\cdots,n\}$。

"友谊定理"有时也称为"村长定理"，"1"就是这个人群中的"村长"。若用图来描述这个定理，两个人互为朋友时则用边连结，否则就不连边，如此构成图 $G$，则 $G[\{2,3,\cdots,n\}]$ 是一个 1- 正则图，故 $n$ 一定是奇数。图 $G$ 如右图所示。 ▮




# 第 3 章　分数横贯

1. 令 $p(x)$ 为 $H$ 的一个 $k$- 横贯，且

$$\sum_{x\in X}p(x)=\tau_k(H)$$

$q(x)$ 为 $H$ 的一个 $h$- 横贯，且

$$\sum_{x\in X}q(x)=\tau_h(H)$$

则 $p(x)+q(x)$ 是 $H$ 的一个 $(k+h)$- 横贯。所以

$$\tau_{k+h}(H)\leqslant\tau_k(H)+\tau_h(H)$$

即 $\tau_k(H)$ 具有次可加性。由 Fekete 的定理知，

$$\frac{\tau_k(H)}{k}\to\inf_k\frac{\tau_k(H)}{k}\qquad(k\to\infty)$$

再由定理 1 知，

$$\inf_k\frac{\tau_k(H)}{k}=\min_k\frac{\tau_k(H)}{k}=\tau^*(H)$$

故有

$$\frac{\tau_k}{k}\to\tau^*(H)\qquad(k\to\infty)$$

（Fekete 有关极限的定理，读者可参阅有关的数学分析的教材。例如：许绍溥等编. 数学分析教程. 南京大学出版社. 第 921 页）

2. 令 $p(E)$ 为 $H$ 的一个 $s$- 匹配，且

$$\sum_{E\in H} p(E) = \nu_s(H)$$

$q(E)$ 为 $H$ 的一个 $t$- 匹配，且

$$\sum_{E\in H} q(E) = \nu_t(H)$$

则 $p(E)+q(E)$ 是 $H$ 的一个 $(k+t)$- 匹配。所以

$$\nu_{s+t}(H) \geqslant \nu_s(H) + \nu_t(H)$$

即关于 $-\nu_k(H)$ 具有次可加性。由 Fekete 的定理知，

$$\frac{-\nu_k(H)}{k} \to \inf_k \frac{-\nu_k(H)}{k} = -\sup_k \frac{\nu_k(H)}{k} \qquad (k\to\infty)$$

再由定理 1 知，

$$\sup_k \frac{\nu_k(H)}{k} = \max_k \frac{\nu_k(H)}{k} = \nu^*(H)$$

故有

$$\frac{\nu_k(H)}{k} \to \nu^*(H) \qquad (k\to\infty)$$

3. 用反证法。设存在 $p<k$，使得

$$\frac{\tau_p(H)}{p} < \tau(H)$$

即

$$\tau_p(H) < p\tau(H)$$

由 $\tau_k(H)$ 具有次可加性，故有

$$\tau_k(H) \leqslant \tau_p(H) + \tau_{k-p}(H) < p\tau(H) + (k-p)\tau(H) = k\tau(H)$$

于是有

$$\tau(H) > \frac{\tau_k(H)}{k}$$

这与假设矛盾而命题成立。

4. 对任意 $s\in\mathbf{N}$，由 $\tau_s(H)$ 的次可加性性质，有

$$\tau^*(H) \leqslant \frac{\tau_{ks}(H)}{ks} \leqslant \frac{s\tau_k(H)}{ks} = \frac{\tau_k(H)}{k} = \tau^*(H)$$

于是，对任意的 $s\in\mathbf{N}$，有

$$\frac{\tau_{ks}(H)}{ks} = \tau^*(H)$$

5. 必要性。若存在两个不同点 $x,y \in X$，使得 $H(x) \subset H(y)$，且 $H(x) \neq H(y)$，即存在 $E \in H(y) - H(x)$，而对任意的 $E' \in H(x)$ 均有 $E' \in H(y)$。令 $H'$ 是把 $H$ 中的边 $E_i$ 重复 $k_i \geqslant 1$ 次所得的超图，则

$$d_{H'}(y) = \sum_{E_i \in H(y)} k_i \geqslant \sum_{E_i \in H(x)} k_i + 1 > d_{H'}(x)$$

故 $H$ 是非可正则的。

充分性。设 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$。下面先证对任意 $E \in H$ 均存在一个含 $E$ 且覆盖 $X$ 的 $H$ 中匹配 $M$。事实上，若 $E$ 的左边有不属于 $E$ 的点，设 $x$ 是其中最靠近 $E$ 的点，$y$ 为 $E$ 中最左的顶点，则存在 $E_{1,l} \in H$ 满足 $x \in E_{1,l}$，$E_{1,l} \cap E = \emptyset$。这是因为若不存在如此的 $E_{1,l}$，则可推出 $H(x) \subset H(y)$ 且 $H(x) \neq H(y)$。这与题中假设矛盾。类似地可找出 $E_{2,l}$，…，直到左边没有 $X$ 中的点为止。同样，若 $E$ 的右边有不属于 $E$ 的点，可找出边 $E_{1,r}$，$E_{2,r}$，…，直到右边无 $X$ 中的点为止。记

$$M = \{\cdots, E_{2,l}, E_{1,l}, E, E_{1,r}, E_{2,r}, \cdots\}$$

则 $M$ 即为含 $E$ 且覆盖 $X$ 的匹配。

令 $M_i$ 是上述方法构造出来的含有 $E_i$ 的覆盖 $X$ 的匹配 $(i = 1,2,\cdots,m)$。令 $H' = \bigcup_{i=1}^{m} M_i$，则 $H'$ 是一个正则超图，且 $k_i \geqslant 1$。故 $H$ 是可正则的。

6. 为了证明本题结果，需参考有关文献中的两个定理。现叙述如下：

在文献"Csima J. Stochastic Functions on Hypergraphs. Combinatorial Theory and its Applications, 1970, I:247 ~ 255"中有如下结果：

**定理 A** 对 $X$ 上的超图 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$，下面性质等价：

(1) $H$ 是可正则的；

(2) 不存在 $X$ 上的实值函数 $p(x)$ 使得

$$p(X) = \sum_{x \in X} p(x) = 0$$

$$p(E_i) \geqslant 0 \quad (\text{对一切 } i \leqslant m)$$

$$p(E_i) > 0 \quad (\text{对某个 } i \leqslant m)$$

在文献"Berge C. Regularisable Graphs (Ⅰ,Ⅱ). *Disc. Math*, 1978, 23:91 ~ 95"中有如下结果：

**定理 B** $X$ 上的 $r$- 一致超图 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$，下面性质等价：

(1) $H$ 是拟可正则的；

(2) 不存在 $X$ 上的实值函数 $p(x)$，使得

$$p(X)=0$$
$$p(E_i)>0 \quad (对一切\ i\leqslant m)$$

下面来证明本题结果。由题中假设可知,对任意 $x,y\in X$,或者 $I_x=I_y$ 或者 $I_x\cap I_y=\emptyset$。令 $I$ 是 $X$ 的由不同的 $I_x$ 所得的分划。在 $I$ 中的每个类中取一个顶点组成的集 $A\subseteq X$。注意到每一个 $I_x$ 中的顶点在 $H$ 中的度均相等。故若 $H$ 是非可正则的,则由 $A$ 诱导出来的子超图 $H_A$ 也是非可正则的,且 $|A|>1$。由定理A知,存在一个实值函数 $p:A\to R$,使得

$$p(A)=0$$
$$p(E_i\cap A)\geqslant 0 \quad (对一切\ i\leqslant m)$$
$$p(E_i\cap A)>0 \quad (对某个\ i\leqslant m)$$

令 $b\in A$ 是满足 $p(b)>0$ 的一个顶点。又令

$$\begin{cases} p'(x)=p(x)+\dfrac{p(b)}{|A|-1} & 对一切\ x\in A-\{b\} \\ p'(x)=0 & 对一切\ x\in(X-A)\cup\{b\} \end{cases}$$

超图 $H'=H-H(b)$,它定义在 $X'=X-\{b\}$ 上,且满足

$$p'(X')=p(A-\{b\})+p(b)=0$$
$$p'(E')=p(E'\cap A)+\frac{p(b)}{|A|-1}|E'\cap A|>0 \quad (对一切\ E'\in H')$$

于是由定理 B,$H'$ 是非拟可正则的,这与假设矛盾。

7. 令 $r$- 一致超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$,其对应于 $L(H)$ 中的顶点集为 $X'=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$。$H$ 中的匹配 $M$ 对应于 $L(H)$ 中的独立集 $S$。把 $L(H)$ 中两个顶点均在 $X'-S$ 中的边除去,得到二部图 $G=(S,X'-S)$。由假设知 $H$ 中的每条边至少与其余 $r$ 条边相交,故对任意 $e\in S$,有 $d_G(e)\geqslant r$。又由于 $H$ 是 $r$- 一致超图,故对任意 $f\in X'-S$,有 $d_G(f)\leqslant r$。所以

$$r|S|\leqslant\sum_{e\in S}d_G(e)=m_G(S,X'-S)=m_G(S,\Gamma_G(S))\leqslant r|\Gamma_G(S)| \quad (*)$$

故

$$|S|\leqslant|\Gamma_G(S)|\leqslant|\Gamma_{L(H)}(S)|$$

若对任意独立集 $S$ 有

$$|S|<|\Gamma_{L(H)}(S)|$$

则由定理 10 知,$L(H)$ 可正则。若存在独立集 $S_0$,有

$$|S_0|=|\Gamma_G(S_0)|=|\Gamma_{L(H)}(S_0)|$$

由($*$)可知,对任意 $e\in S_0$,$d_G(e)=r$ 以及 $d_G(f)=r$,$\forall f\in X'-S$。故有 $\Gamma_G(S_0)$ 与 $X'-S_0-\Gamma_G(S_0)$ 之间无边。又不失一般性,可假设 $H$ 是连通的。否则,

仅需分别考虑其各连通分支即可。故有 $X' - S_0 = \Gamma_G(S_0)$，且 $G$ 是 $r$- 正则二部图。

令 $X = \bigcup_{f \in S_0} f = \bigcup_{F \in M_0} F$，$Y = \bigcup_{e \in X' - S_0} e = \bigcup_{E \in H - M_0} E$。对 $x \in X$，由于 $d_G(x) \geqslant 2$，故存在边 $E$ 满足 $x \in E$ 和 $E \notin M_0$。于是有 $x \in Y$，即 $X \subseteq Y$。因 $H$ 是 $r$- 一致超图，$M_0$ 是匹配，故 $|X| = r|S_0|$。

又由（*）有

$$|Y| = r|X' - S_0| = r|\Gamma_G(S_0)| = r|S_0|$$

故 $X = Y$。若 $\Gamma_{L(H)}(S_0)$ 中有边，则存在 $F_1, F_2 \in H - M_0$，$F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$，从而有 $|Y| < r|S_0| = |X|$，矛盾。故 $L(H) = G$ 是正则二部图。

综上所述，$L(H)$ 是可正则的。

8. 由于 $G$ 是连通非二部的可正则图，则由定理 10，对任意 $G$ 的独立集 $S$，有

$$|\Gamma_G(S)| > |S|$$

对于每个含 $G$ 作为部分子图的图 $G'$，$G'$ 中的独立集 $S$ 也一定是 $G$ 中的独立集，故有

$$|\Gamma_{G'}(S)| \geqslant |\Gamma_G(S)| > |S|$$

又由于 $G$ 是非二部图，故 $G'$ 也是非二部图。由定理 10 可知，$G'$ 是可正则的。

9. 首先由第 1 章中的定理 3 对 $H$ 有

$$m(H) \leqslant \frac{n(n-1)}{r(r-1)}$$

又由定理 7 有 $\tau^*(H) = n/r$。最后由定理 14 的推论 3 有 $\tau^*(H) \leqslant (r-1)\nu(H)$。于是有：

$$\nu(H) \geqslant \frac{\tau^*(H)}{r-1} \geqslant \frac{n}{r(r-1)} = \frac{mn}{mr(r-1)} \geqslant \frac{m}{n-1}$$

10. 对第 2 章 §4 中图 8 的例子：$\tau(H) = 7, \nu(H) = 6, m(H) = 12$。显然有

$$\nu(H) = 6 > \frac{(\tau(H))^2}{m(H)} = \frac{7^2}{12} \geqslant \frac{(\tau^*(H))^2}{m(H)}$$

对第 2 章 §4 中图 11 的例子：$\tau(H) = 10, \nu(H) = 9, m(H) = 67$。显然有

$$\nu(H) = 9 > \frac{(\tau(H))^2}{m(H)} = \frac{9^2}{67} \geqslant \frac{(\tau^*(H))^2}{m(H)}$$

# 第4章　着　色

1. $\alpha(K_n^r)=r-1$;

$\chi(K_n^r)=\left\lceil\frac{n}{r-1}\right\rceil$;

$\alpha(K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}^r)=n-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{n_i\}$;

$\chi(K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}^r)=2$。

2. 令 $S$ 是$H$ 中的最大独立集,$|S|=\alpha(H)$。令二部图 $G=(S,X-S)$,其中 $xy\in E(G)\Leftrightarrow x\in S,y\in X-S$,且存在 $E\in H$ 使得$x,y\in E$。任取 $Q\subseteq X-S,N_G(Q)\subseteq S$。令 $A=Q\cup N_G(Q)$,于是由假设 $H|A$ 的最大独立集$S'$ 满足

$$|S'|\geqslant\frac{1}{2}|Q\cup N_G(Q)|$$

注意到$(S-N_G(Q))\cup S'$ 也是$H$ 的独立集,故有

$$|(S-N_G(Q))\cup S'|\leqslant|S|$$

于是有

$$|S'|\leqslant|N_G(Q)|$$

从而有$|Q|\leqslant|N_G(Q)|$,对任意 $Q\subset X-S$ 均成立。由 König 定理,存在一个匹配 $M$ 覆盖$X-S$ 中的所有点,故有

$$\rho(H)\leqslant\rho(G)\leqslant|S|=\alpha(H)$$

3. 必要性。若 $V(H_i)\neq V(H)$,可构造 $H'_i$ 如下:$V(H'_i)=V(H)$且$H'_i=\{E|E\in H_i$ 或$E$ 为 $V(H)\setminus V(H_i)$ 中点$\}$。显然,

$$\chi(H'_i)=\chi(H_i)\leqslant m_i$$

故不失一般性地假设 $V(H_i)=V(H)$ $(i=1,2,\cdots,k)$。令

$$X=\{(x_1,x_2,\cdots,x_k)|1\leqslant x_i\leqslant m_i,1\leqslant i\leqslant k\}$$

对 $H$ 中的每一个顶点在$X$ 中必有矢量与之对应,该矢量的 $i$ 分量为该点在$H_i$ 中的着色,所以在此着色下无单色边。故有

$$\chi(H)\leqslant m_1m_2\cdots m_k$$

充分性。设

$$X=\{(x_1,x_2,\cdots,x_k)|1\leqslant x_i\leqslant m_i,1\leqslant i\leqslant k\}$$

是 $H$ 的色集合,$H$ 中任一顶点均对应于$X$ 中的一个矢量。

按以下步骤来构造 $H_1,H_2,\cdots,H_k$:

(1) 定义 $H_1: V(H_1) \subset V(H)$，$H$ 中的边 $E$ 是 $H_1$ 中的边 $\Leftrightarrow$ 边 $E$ 中所有顶点对应 $X$ 中的矢量的第一个分量不全同；

(2) 令 $H := H - E(H_1)$，重复(1)，定义 $H_2$；

(3) $H := H - E(H_1) \cup E(H_2)$，重复(1)，定义 $H_3$。

这样一直进行下去，直到定义 $H_k$，显然，$H_i \cap H_j = \varnothing\ (i \neq j)$，且 $\chi(H_i) \leqslant m_i$。

显然 $H = \bigcup_{i=1}^{k} H_i$。事实上，若存在 $E \in H - \bigcup_{i=1}^{k} H_i$，则 $E$ 中任一点对应的矢量均相同，即 $E$ 是单色边，矛盾。故命题成立。

4. 令 $S$ 是 $H$ 中最大独立集，$|S| = \alpha = \alpha(H)$。

(1) 因 $|E \cap E'| \leqslant r-2$，故 $S$ 中任 $r-1$ 个顶点至多含于 $H$ 的一条边中，即在 $X - S$ 中至多有一个顶点与上述 $r-1$ 个顶点构成 $H$ 中的一条边；

(2) 对任给 $x \in X - S$，在 $S$ 中必存在 $r-1$ 个顶点与 $x$ 构成 $H$ 中的一条边，否则有 $x \in S$，这与 $S$ 的极大性矛盾。

由(1)，(2) 有 $n - \alpha \leqslant \binom{\alpha}{r-1}$。

5. 在 $n \times n$ 的棋盘上，对奇排的正方形棋格着 1 色，对偶排的正方形棋格着 2 色。易证 $H_n^Q, H_n^K, H_n^R, H_n^B$ 均能正常着色。故有

$$\chi(H_n^Q) = \chi(H_n^K) = \chi(H_n^R) = \chi(H_n^B) = 2$$

这是因为对上述超图显然不能 1 色正常着色。

6. 当 $n = 2k$ 时，$\{k, k+1, \cdots, 2k\}$ 中任两个相异元素之和大于 $2k$，故该集为 $H$ 中的独立集；当 $n = 2k+1$ 时，$\{k+1, k+2, \cdots, 2k+1\}$ 中任两个元素之和大于 $2k+1$，故该集为 $H$ 中的独立集。于是有

$$\alpha(H) \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$$

反过来，任取一个长度为 $\left[\frac{n}{2}\right] + 2 = k+2$ 的子集合 $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_{k+2}\}$。令 $s_1 = \min_{1 \leqslant i \leqslant k+2} \{s_i\}$。作新集合

$$S' = \{s_i - s_1 \mid 2 \leqslant i \leqslant k+2\}$$

易知 $S' \subset X$ 且 $|S'| = k+1$。又因 $|S| = k+2$，$S \subseteq X$，所以 $S' \cap S \neq \varnothing$。因而存在 $s_{i_0}, s_{j_0} \in S$，使得 $s_{j_0} - s_1 = s_{i_0}$，即 $s_1 + s_{i_0} = s_{j_0}$。故 $S$ 不是独立集。所以有

$$\alpha(H) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$$

因而

$$\alpha(H)=\left[\frac{n}{2}\right]+1$$

7. 由第1章习题的第12题知，$H$ 满足 Helly 性质。题中 $\chi(H)\neq 2$ 这一结论是错的。如：令

$$N_1=\{1,3,4,7,8,9,13,14,15,16,21,22,23,24,25,\cdots\}$$

$$N_2=\{2,5\ 6,10,11,12,17,18,19,20,\cdots\}$$

显然 $N=N_1\cup N_2$，且任一算术级数构成超图的边必与 $N_1,N_2$ 相交。故有 $\chi(H)=2$。

8. (1) 显然 $\bar{\gamma}(K_n^r)\geqslant r$。又对任一 $r$ 色分划，由于每一色类非空，在每一色类中任取一点，共取出 $r$ 个顶点，它构成 $K_n^r$ 中的一条边，且是强着色，故有 $\bar{\gamma}(K_n^r)\leqslant r$。所以有 $\bar{\gamma}(K_n^r)=r$。

(2) 本小题结论有误，见反例：超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_{n-r+1})$，其顶点集、边集分别为

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_{r-1},y_1,y_2,\cdots,y_{n-r+1}\}$$

$$E_i=\{x_1,x_2,\cdots,x_{r-1},y_i\}\qquad(i=1,2,\cdots,n-r+1)$$

则

$$\bar{\gamma}(H)=n$$

(3) 对 $K^r_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$，不失一般性假定 $n_1\leqslant n_2\leqslant n_3\leqslant\cdots\leqslant n_r$。若对 $X_1\cup X_2$ 作为一部，而 $X_3,X_4,\cdots,X_r$ 中每一顶点作为一部，则如此的 $X$ 的 $n_3+n_4+\cdots+n_r+1$ 部分划，$K^r_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$ 中无强着色边。故有

$$\bar{\gamma}(K^r_{n_1,n_2,\cdots,n_r})\geqslant n_3+n_4+\cdots+n_r+2$$

另一方面，令 $l=n_1+n_2$。对 $l$ 进行归纳：当 $l=2$ 时，$n_1=n_2=1$，故显然有

$$\bar{\gamma}(K^r_{n_1,n_2,\cdots,n_r})\leqslant n_3+n_4+\cdots+n_r+2$$

成立。若当 $l=k-1$ 时成立

$$\bar{\gamma}(K^r_{n_1,n_2,\cdots,n_r})\leqslant n_3+n_4+\cdots+n_r+2$$

即对任一 $X$ 的 $n_3+n_4+\cdots+n_r+2$ 部分划，均有强着色边。当 $l=k$ 时，则增加的一点可任意将它放在某类中，而不影响原来已存在的强着色边。故有

$$\bar{\gamma}(K^r_{n_1,n_2,\cdots,n_r})\leqslant n_3+n_4+\cdots+n_r+2$$

综上所述可得

$$\bar{\gamma}(K^r_{n_1,n_2,\cdots,n_r})=n_3+n_4+\cdots+n_r+2$$

(4) 设 $G$ 具有 $p$ 个连通分支,取 $p$- 部分划 $(S_1,S_2,\cdots,S_p)$,其中 $S_i$ 均为 $G$ 中各个连通分支。显然 $G$ 中无强着色边,所以 $\bar{\gamma}(G)\geqslant p+1$。

反过来对 $G$ 的顶点集 $X$ 的任一个 $p+1$ 部的分划,显然存在 $x,y$ 属于同一个连通分支,但不属于分划中的同一个类中,考察 $x$-$y$ 路:

$$xx_1x_2\cdots x_ky$$

若 $x$ 与 $x_1$ 着不同色,则 $xx_1$ 是一条强着色边;否则,考察 $x_1$ 和 $x_2$,若 $x_1$ 与 $x_2$ 着不同色,则 $x_1x_2$ 是一条强着色边;否则,考察 $x_2$ 和 $x_3$,…,如此继续下去,至多到 $x_k$ 和 $y$,肯定能找到一条强着色边。故 $\bar{\gamma}(G)\geqslant p+1$。

综上所述,$\bar{\gamma}(G)\geqslant p+1$。

(5) 此小题结论有误。见反例:$G=K_3\cup K_3$,此时有 $\bar{\gamma}(H)=5<n=6$。

若对 $G$ 加上 2- 边连通条件,则 $\bar{\gamma}(H)=n$ 成立。

事实上,任取 $G$ 中 $n$ 条边,分别着以 $n$ 种颜色,则显然存在一个圈被强着色,于是有 $\bar{\gamma}(H)\leqslant n$。另一方面,取定 $G$ 中一棵生成树 $T$,其上 $n-1$ 条边着以 $n-1$ 种不同色。在补树上任一边 $e$,$T+e$ 中含唯一的一个圈 $C$。着 $e$ 的色为 $C$ 上某一边所着的色。于是我们得到一个对 $G$ 中边集 $E$ 的 $n-1$ 部分划,使得 $G$ 中无圈被强着色,即 $H$ 中无强着色边。故 $\bar{\gamma}(H)\geqslant n$。

综上所述,有 $\bar{\gamma}(H)=n$。

9. 设 $X$ 的 $\alpha(H)+1$ 分划为 $(S_1,S_2,\cdots,S_{\alpha(H)+1})$。取 $x_i\in S_i$ $(i=1,2,\cdots,\alpha(H)+1)$,则 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{\alpha(H)+1}\}$ 不是 $H$ 的独立集,故存在 $H$ 中的边 $E\subset\{x_1,x_2,\cdots,x_{\alpha(H)+1}\}$。显然 $|E\cap S_i|\leqslant 1$,故 $E$ 是 $H$ 的强着色边。所以

$$\bar{\gamma}(H)\leqslant\alpha(H)+1$$

又对整数 $n\geqslant p\geqslant r\geqslant 2$。取顶点集 $X$,$|X|=n$ 和 $X$ 的一个 $(p-1)$- 分划 $(S_1,S_2,\cdots,S_{p-1})$,定义

$$H_0=(E\mid|E|=r,E\subset X,|E\cap S_i|>1,对某个\ i)$$

于是 $\bar{\gamma}(H_0)\geqslant p$。

另一方面,任取 $x_i\in S$ $(i=1,2,\cdots,p-1)$,则 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{p-1}\}$ 中不含 $H_0$ 的边,但若增加 $X$ 中任一其他点 $x_0$,则由 $H_0$ 的定义知,在 $\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{p-1}\}$ 中包含 $H_0$ 的某一条边 $E$。故 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{p-1}\}$ 是 $H_0$ 中的最大独立集,即 $\alpha(H_0)=p-1$。所以

$$\bar{\gamma}(H_0)\leqslant\alpha(H_0)+1=p$$

从而有 $\bar{\gamma}(H_0)=p$。

综上所述,存在 $n$ 阶的 $r$- 一致超图满足 $\alpha(H)=p-1$,$\bar{\gamma}(H)=p$。

10. 设 $V(G)=\{u_1,u_2,\cdots,u_{n(G)}\}$，$V(K_n)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$。不失一般性，可假定$\{u_1,u_2,\cdots,u_{\alpha(G)}\}$是 $G$ 的最大独立集。对顶点集 $V(G)\times V(K_n)$ 作如下 $n(G)+\alpha(G)(n-1)$ 分划：

$$S_{ij}=\{(u_i,v_j)\}\qquad(1\leqslant i\leqslant\alpha(G),1\leqslant j\leqslant n)$$
$$S_k=\{(u_k,v_j)\mid 1\leqslant j\leqslant n\}\qquad(\alpha(G)+1\leqslant k\leqslant n(G))$$

则 $G\times K_n$ 的任一边$\{(u_i,v_k),(u_i,v_l),(u_j,v_k),(u_j,v_l)\}$在这分划下不可能是强着色边。故有

$$\bar{\gamma}(G\times K_n)\geqslant n(G)+\alpha(G)(n-1)+1$$

另一方面，令

$$S=\{(u_i,v_j)\mid 1\leqslant i\leqslant\alpha(G),1\leqslant j\leqslant n\}\cup\{(u_i,v_1)\mid\alpha(G)+1\leqslant i\leqslant n(G)\}$$

易证 $S$ 是$G\times K_n$ 的一个最大独立集，从而有

$$\alpha(G\times K_n)=n(G)+\alpha(G)(n-1)$$

再由本章习题的第 9 题知，

$$\bar{\gamma}(G\times K_n)\leqslant\alpha(G\times K_n)+1=n(G)+\alpha(G)(n-1)+1$$

综上所述，有

$$\bar{\gamma}(G\times K_n)=n(G)+\alpha(G)(n-1)+1$$

11. (1) 对 $\Delta(T)\leqslant 2$，可直接验证命题成立。故可假定 $\Delta(T)\geqslant 3$，从而有 $k\geqslant 3$。下面对顶点数 $n$ 归纳。取 $T$ 的悬挂点$x_0$ 及其邻点 $x_1$，令 $T_0=T-x_0$。由归纳假设，$T_0$ 有等部 $k$- 着色，设为 $|S_1|\leqslant|S_2|\leqslant\cdots\leqslant|S_k|$。显然仅当 $|S_1|<|S_2|$且 $x_1\in S_1$ 时才需进一步讨论，否则命题已成立。故下面仅需考虑 $k\mid n$ 的情况。对 $T$ 中任意边$e$，令 $T-e$ 的两连通分支为 $T_1,T_2$，其顶点数分别为 $n_1=n_1(T_1)$，$n_2=n_2(T_2)$。由归纳法假设 $T_1,T_2$ 均有等部$k$- 着色。对$e$的两端点无论它分属于 $T_1,T_2$ 中何部，仅需对色作适当调整均可合并成 $T$ 的一个等部$k$- 着色，除非 $n_1\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ k)$，$n_2\equiv k-1\ (\mathrm{mod}\ k)$ 需进一步讨论。下面假设对任意 $e$，$T-e$ 的两分支的顶点数在模$k$ 下均取值1或 $k-1$。取 $T$ 中的悬挂点$x_0$ 和它的邻点 $x_1$，则有 $d_T(x_1)\geqslant 3$，否则考察与 $x_1$ 相关联的另一边 $e$，$T-e$ 的两分支为$n_1=2$，$n_2\equiv k-2\ (\mathrm{mod}\ k)$ 而矛盾。下面考察与 $x_1$ 相关联的边 $e'=x_1x'$。若 $T-e'$ 中存在不含 $x_0$ 的分支 $T'$ 的顶点数$n'\equiv k-1\ (\mathrm{mod}\ k)$，考察 $T'+\{x_0\}$和 $T''=T-(V(T')\cup\{x_0\})$，则对应的顶点数均被 $k$ 整除。于是由归纳法假设，它们均有等部 $k$- 着色。注意到 $k\geqslant 3$，故易于由上述两个等部$k$- 着色合并成$T$ 的等部$k$- 着色，且使 $x_0$ 与 $x_1$ 及 $x'$ 与$x_1$ 之间均着异色，从而命题成立。故下面假定对任意与 $x_1$ 相关联的边 $e'$，$T-e'$ 中不含$x_0$ 的分支 $T_3$ 的顶点数 $n_3\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ k)$。若 $n_3\geqslant k+$

1,则在 $T_3$ 中取悬挂边 $e'_0 = x'_0x'_1$。令 $T'_3 = T_3 - x'_0$,$T''_3 = T - T'_3$,则它们对应的顶点数均被 $k$ 整除。由归纳法假设 $T'_3$,$T''_3$ 均有等部 $k$- 着色,利用类似前述的讨论及 $k \geqslant 3$,由 $T'_3$,$T''_3$ 的两个等部 $k$- 着色可合并成 $T$ 的一个等部 $k$- 着色。若与 $x_1$ 相关联的边 $e'$,$T - e'$ 中不含 $x_0$ 的分支均为 1 个顶点。于是此时 $T = T_{1,\Delta}$,易直接验证命题成立。

综上所述,故由归纳法知命题成立。

(2) 考察 $T = K_{1,5}$,它不具有 $\left\lceil \frac{\Delta(T)}{2} \right\rceil = 3$ 等部着色,故(1) 中结论在某种意义下是最好的。

12. 若 $kr - k + 1 > n$,则由 $m_k(n,r)$ 的定义有:

$$m_k(n,r) \leqslant \binom{n}{r} < \binom{kr-k+1}{r}$$

若 $kr - k + 1 \leqslant n$,取 $kr - k + 1$ 个顶点的点集 $X$,在 $X$ 上构成一个完全 $r$- 一致超图 $H$。对 $X$ 的任一 $k$- 色分划$(X_1, X_2, \cdots, X_k)$,由抽屉原则存在某个 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$,$|X_i| \geqslant r$。从而在 $X_i$ 中含有 $H$ 的某条边,即为单色边。故 $H$ 不是 $k$ - 可着色的。所以

$$m_k(n,r) \leqslant \binom{kr-k+1}{r}$$

综上所述,本命题结论成立。

13. 用定理 8 的结果,令 $q_1 = k$,$q_2 = 0$,于是有

$$m_k^0(n,r) \geqslant \binom{n}{r}\left[q_1\binom{[n/k]}{r} + q_2\binom{\{n/k\}}{r}\right]^{-1} = \frac{\binom{n}{r}}{k\binom{p}{r}}$$

$$= \frac{\frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}}{k\frac{p}{r}\binom{p-1}{r-1}} = \binom{n-1}{r-1}\binom{p-1}{r-1}^{-1}$$

14. 考察极超图 $H_1$,其为顶点数为 $n-1$ 的、无$(p-1)$- 独立集的$(r-1)$- 一致超图。于是有

$$m(H_1) = T(n-1, p-1, r-1)$$

下面构造 $r$- 一致超图

$$H_0 = \{E \cup \{x_0\} \mid E \in H_1, x_0 \notin V(H_1)\}$$

显然 $m(H_0)=m(H_1)$。

令 $(S_1,S_2,\cdots,S_k)$ 为 $H_0$ 的一个 $k$- 色分划。由于 $\alpha(H_1)<p-1$，故 $\alpha(H_0)<p$。所以对上述色分划存在某个 $i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$，有 $|S_i|\geqslant k\geqslant p$。从而 $S_i$ 中包含 $H_0$ 中的边，亦即 $(S_1,S_2,\cdots,S_k)$ 不可能是 $H_0$ 的等部 $k$- 色分划。故 $H_0$ 无等部 $k$- 色分划。所以有

$$m_k^0(n,r)\leqslant m(H_0)=m(H_1)=T(n-1,p-1,r-1)$$

15. 因为 $H$ 的独立数为 $\alpha$，所以 $m\geqslant T(n,\alpha+1,r)$。由定理 9 中的不等式 (3)，有

$$m\geqslant T(n,\alpha+1,r)\geqslant\frac{n-\alpha}{r}\binom{n}{r-1}\binom{\alpha}{r-1}^{-1}$$

即

$$\alpha+\binom{\alpha}{r-1}rm\binom{n}{r-1}^{-1}\geqslant n$$

这就是第二个不等式。

显然 $rm\binom{n}{r-1}^{-1}$ 是 $H$ 中含 $r-1$ 元子集中边的平均值，故由 $z$ 的定义有

$$z\geqslant rm\binom{n}{r-1}^{-1}$$

于是由上述不等式，有

$$\alpha+\binom{\alpha}{r-1}z\geqslant n$$

故第一个不等式亦成立。

16. 由题中 $H$ 的定义有

$$m(H)=m_k^0(n,r),\qquad p=\frac{n}{k}=r$$

由本章习题的第 13 题得

$$m_k^0(n,r)\geqslant\binom{n-1}{r-1}\binom{p-1}{r-1}^{-1}=\binom{n-1}{r-1}$$

另一方面，由本章习题的第 14 题，有

$$\begin{aligned}m_k^0(n,r)&\leqslant T(n-1,p-1,r-1)\\&\leqslant\left[1+\log\binom{n-r}{p-r}\right]\binom{n-1}{r-1}\binom{p-1}{r-1}^{-1}\\&=\binom{n-1}{r-1}\end{aligned}$$

所以，

$$m(H) = m_k^0(n,r) = \binom{n-1}{r-1}$$

故当 $k \geqslant 3$ 时，$H$ 是 $K_n^r$ 的一个星。但当 $k=2$ 时，$H$ 除 $K_4^2$ 的一个星外，$K_4^2$ 的任何一极大交簇（例如 $K_3$）均满足条件。

17. 充分性。由定理11，$K_n^r$ 有满足下列条件的边集的分划 $K_n^r = H_1 + H_2 + \cdots + H_k$，其中，

(ⅰ) $m_i = m(H_i) = \left\lceil \binom{n}{r}k^{-1} \right\rceil \qquad (i = 1,2,\cdots,s)$

$$m_i = m(H_i) = \left[ \binom{n}{r}k^{-1} \right] \qquad (i = s+1, s+2, \cdots, k)$$

这里

$$s = \binom{n}{r} - k\left[\binom{n}{r}k^{-1}\right] \qquad (0 \leqslant s < k)$$

(ⅱ) $\left[\frac{r}{n}m_i\right] \leqslant d_{H_i}(x) \leqslant \left\lceil \frac{r}{n}m_i \right\rceil \qquad (\forall x \in X)$

现对 $H_i$ 中的边均着以 $i$ 色 $(i = 1,2,\cdots,k)$。下面将证明 $(H_1, H_2, \cdots, H_k)$ 是 $K_n^r$ 的一个等部 $k$- 边着色。

**情况1** $1 \leqslant i, j \leqslant s$ 或 $s+1 \leqslant i, j \leqslant k$。

$$\begin{aligned}|d_{H_j}(x) - d_{H_i}(x)| &\leqslant \left| \left\lceil \frac{r}{n}m_j \right\rceil - \left[\frac{r}{n}m_i\right] \right| \\ &= \left| \left\lceil \frac{r}{n}m_j \right\rceil - \left[\frac{r}{n}m_j\right] \right| \leqslant 1\end{aligned}$$

**情况2** $1 \leqslant j \leqslant s, s+1 \leqslant i \leqslant k$。

$$\begin{aligned}|d_{H_j}(x) - d_{H_i}(x)| &\leqslant \left| \left\lceil \frac{r}{n}m_j \right\rceil - \left[\frac{r}{n}m_i\right] \right| \\ &= \left| \left\lceil \frac{r}{n}\left\lceil \binom{n}{r}k^{-1} \right\rceil \right\rceil - \left[\frac{r}{n}\left[\binom{n}{r}k^{-1}\right]\right] \right| \qquad (1)\end{aligned}$$

另外有

$$\begin{aligned}\binom{n}{r}k^{-1} \leqslant \left[\left\lceil \frac{r}{kn}\binom{n}{r} \right\rceil \frac{n}{r}\right] &\Leftrightarrow \left\lceil \binom{n}{r}k^{-1} \right\rceil \leqslant \left\lceil \binom{n}{r}\frac{r}{kn} \right\rceil \frac{n}{r} \\ &\Leftrightarrow \frac{r}{n}\left\lceil \binom{n}{r}k^{-1} \right\rceil \leqslant \left\lceil \binom{n}{r}\frac{r}{kn} \right\rceil \\ &\Leftrightarrow \left\lceil \frac{r}{n}\left\lceil \binom{n}{r}k^{-1} \right\rceil \right\rceil \leqslant \left\lceil \binom{n}{r}\frac{r}{kn} \right\rceil \qquad (2)\end{aligned}$$

$$\binom{n}{r}k^{-1} \geqslant \left\lceil \left[\binom{n}{r}\frac{r}{kn}\right]\frac{n}{r} \right\rceil \Leftrightarrow \left[\binom{n}{r}k^{-1}\right] \geqslant \left[\binom{n}{r}\frac{r}{kn}\right]\frac{n}{r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{n}\left[\binom{n}{r}k^{-1}\right] \geqslant \left[\binom{n}{r}\frac{r}{kn}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{r}{n}\left[\binom{n}{r}k^{-1}\right]\right] \geqslant \left[\binom{n}{r}\frac{r}{kn}\right] \tag{3}$$

由充分性条件知(2)、(3) 式成立。下面将(2)、(3) 式代入(1) 式,得

$$\left|d_{H_j}(x) - d_{H_i}(x)\right| \leqslant \left|\left\lceil\binom{n}{r}\frac{r}{kn}\right\rceil - \left[\binom{n}{r}\frac{r}{kn}\right]\right| \leqslant 1$$

故充分性成立。

必要性。由于 $K_n^r = H_1 + H_2 + \cdots + H_k$ 是一个等部 $k$- 边着色,于是由(1) 有

$$\left|d_{H_j}(x) - d_{H_i}(x)\right| \leqslant \left|\left\lceil\frac{r}{n}\left\lceil\binom{n}{r}k^{-1}\right\rceil\right\rceil - \left[\frac{r}{n}\left[\binom{n}{r}k^{-1}\right]\right]\right| \leqslant 1 \tag{4}$$

若(3) 式不成立,于是有

$$\left[\frac{r}{n}\left[\binom{n}{r}k^{-1}\right]\right] < \left[\binom{n}{r}\frac{r}{kn}\right] \leqslant \left\lceil\binom{n}{r}\frac{r}{kn}\right\rceil$$

由(4) 式,(2) 式必成立且有

$$\left[\frac{r}{n}\left[\binom{n}{r}k^{-1}\right]\right] < \left[\binom{n}{r}\frac{r}{kn}\right] = \left\lceil\frac{r}{n}\left\lceil\binom{n}{r}k^{-1}\right\rceil\right\rceil$$

$$= \left[\frac{r}{n}\left[\binom{n}{r}k^{-1}\right]\right] + 1 \leqslant \left\lceil\binom{n}{r}\frac{r}{kn}\right\rceil \tag{5}$$

令

$$\binom{n}{r}k^{-1} = l + \frac{t}{k} \qquad (0 \leqslant t < k)$$

$$\frac{rl}{n} = h + \frac{s}{n} \qquad (0 \leqslant s < n)$$

若 $t = 0$,易知(3) 式必成立。故下面证明中均假设 $t > 0$,于是由(5) 式有

$$h < \left[\frac{lr}{n} + \frac{tr}{kn}\right] = h + \left[\frac{s}{n} + \frac{tr}{kn}\right] = \left\lceil\frac{r}{n}(l+1)\right\rceil$$

$$= \left\lceil h + \frac{s+r}{n}\right\rceil = h + \left\lceil\frac{s+t}{n}\right\rceil = h + 1$$

故有

$$1 \leqslant \frac{s}{n} + \frac{tr}{kn} < 2 \qquad 和 \qquad 0 < \frac{s+r}{n} \leqslant 1$$

将上式化简得 $r \leqslant \frac{tr}{k}$,即 $k \leqslant t$,矛盾。故(3) 式成立。类似地,可证(2) 式也成立。

从而由(2)、(3) 式推得

$$\left\lceil\left[\binom{n}{r}\frac{r}{kn}\right]\frac{r}{n}\right\rceil \leqslant \binom{n}{r}k^{-1} \leqslant \left[\left\lceil\binom{n}{r}\frac{r}{kn}\right\rceil\frac{n}{r}\right]$$

成立。故必要性成立。

18. 令 $\chi(G(n,r,1))=k$，$(X_1,X_2,\cdots,X_k)$ 为其 $k$- 色分划，则 $X_i$ 中任两点均不相交，即这两点对应的两个 $r$ 元集相交。故 $X_i$ 中的点对应的 $k$- 元集簇是一个交簇，由 $G(n,r,1)$ 的定义，上述交簇构成 $K_n^r$ 的一个交簇覆盖，所以有

$$\chi(G(n,r,1))\geqslant \tau_0(K_n^r)$$

又由于上述情况是可逆的，故又有

$$\chi(G(n,r,1))\leqslant \tau_0(K_n^r)$$

综上所述，有

$$\chi(G(n,r,1))=\tau_0(K_n^r)$$

19. 考察$\overline{L(H)}$。设 $\chi(\overline{L(H)})=k$，并令$(X_1,X_2,\cdots,X_k)$是$\overline{L(H)}$的一个 $k$-色分划，则 $X_i$ 任两点对应在$H$ 中的两边相交。所以 $X_i$ 对应在$H$ 中是一个边的交簇，且这交簇覆盖了 $H$。故有 $\tau_0(H)\leqslant\chi'(\overline{L(H)})$。由于$\overline{L(H)}$是简单图，由Brooks定理知，有

$$\chi(\overline{L(H)})\leqslant\Delta(\overline{L(H)})+1$$

而

$$\Delta(\overline{L(H)})=\max_i m(H|X-E_i)$$

所以，

$$\tau_0(H)\leqslant\Delta(\overline{L(H)})+1=\max_i m(H|X-E_i)+1$$

当上述等号成立时，则有

$$\chi(\overline{L(H)})=\Delta(\overline{L(H)})+1$$

令$\overline{L(H)}$中最大度所在的连通分支为 $C$，则有

$$\chi(C)=\Delta(\overline{L(H)})+1$$

由 Brooks 定理知，$C$ 只能是团或奇圈。

20. 对 $n$ 用归纳法。$n=3$ 时，$\tau_0(K_3)=1$，故命题成立。下面假设对 $k\geqslant4$，命题成立，即 $\tau_k(K_k)=k-2$。现考察 $K_{k+1}$。易知 $\tau_0(K_{k+1})\leqslant k-1$。若 $\tau_0(K_{k+1})\leqslant k-2$。注意到

$$\binom{k+1}{2}>3(k-1)\qquad(k\geqslant4)$$

故用不多于 $k$ 个交簇来覆盖$K_{k+1}$，其交簇中必有是 $K_{k+1}$ 中星的交簇。在 $K_{k+1}$ 中，除去一个星，所得之图为 $K_k$，故有

$$\tau_0(K_{k+1}-K_{k+1}(x))=\tau_0(K_k)\leqslant k-3$$

这与归纳法假设矛盾，所以 $\tau_0(K_{k+1})\geqslant k-1$。故由归纳法知，$\tau_0(K_n)=n-2$。

# 第 5 章　二部图在超图中的推广

1. 在这个 $B$- 圈中,彼此不相继且交非空的边对只有2 390 和5 690,因此原 $B$- 圈不满足任意两条不相继的边不相交。而原 $B$- 圈若存在真子 $B$- 圈,则只可能以 2 390 和 5 690 为相继边,按原来的圈的次序构成新圈,易知只有两个真子圈:

(ⅰ)(2 390,34,45,5 690)是长为 4 的圈,它不是 $B$- 圈;

(ⅱ)(2 390,12,781,678,5 690)是长为 5 的圈,但

$$|\{2\,390\}\cap\{5\,690\}|=2$$

$$|\{781\}\cap\{678\}|=2$$

所以这个圈也不是 $B$- 圈,故原 $B$- 圈不存在满足要求的子 $B$- 圈。

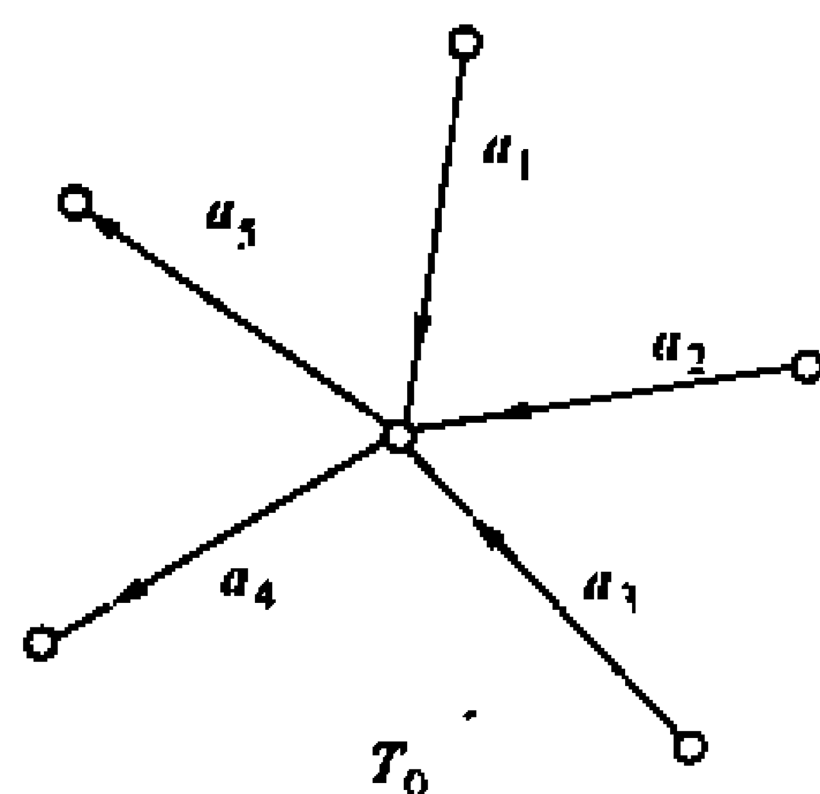
2. 若用2 种颜色对 $K_{2r-1}^r$ 的 $2r-1$ 个顶点着色,则至少有 $r$ 个顶点着同一色,即 $K_{2r-1}^r$ 有单色边。故 $\chi(K_{2r-1}^r)>2$。所以 $K_{2r-1}^r$ 满足 Sterboul 猜测的条件。由于 $K_{2r-1}^r$ 中任意两条边均相交,故除 3- 圈外,$K_{2r-1}^r$ 中不存在 $B$- 圈,使不相继的边不相交。

对于 3- 圈:$(x_1,F\ \ x_2,E_2,x_3,E_3,x_1)$,若还要求圈中相继边恰好有一个公共顶点,则有

$$|E_1\cap E_2|=|E_2\cap E_3|=|E_1\cap E_3|=1$$

$$|E_1|=|E_2|=|E_3|=r$$

故 $K_{2r-1}^r$ 中的顶点数至少是 $3r-3$,于是有 $2r-1\geqslant 3r-3$,即 $r=2$。故仅 $K_3^2$ 满足题中条件外,$K_{2r-1}^r$ $(r\geqslant 3)$ 均不成立。




3. 设 $H$ 是某一条线上的区间超图,其点依次为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,作 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的有向树 $T$:$n-1$ 条弧为

$$\{(x_i,x_{i+1})\mid i=1,2,\cdots,n-1\}$$

则线 $X$ 上的一个区间对应 $T$ 的一条有向路。故 $H$ 也是有向树 $T$ 的路超图。所以例 2 是例 3 的特例。

令 $T_0$ 是弧集为 $E=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$的一棵有向树,如右上图所示。取一个例4所述的在树 $T_0$ 的弧集上的超图 $H_0$:其点集为 $U=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$,$H_0=(\{a_1,a_4\},\{a_1,a_5\},\{a_2,a_4\},\{a_2,a_5\},\{a_3,a_4\},\{a_3,a_5\})$。则不可能存在以 $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$为顶点集的有向树 $T$,使 $H_0$ 为例 3 所述的树 $T$ 的路超图。

事实上,若$\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$是某有向树 $T$ 的顶点集且$H$为$T$的路超图,则 $a_1$ 和 $a_4$,$a_4$ 和 $a_2$,$a_2$ 和 $a_5$,$a_5$ 和 $a_1$ 之间都有弧。因此 $T$ 的底图含有圈,矛盾。故例 4 不能看作例 3 的特例。

4. 显然易验证,超图 $H_i$ $(i = 1,2,3,4,5)$ 中无奇圈,由定理 5 知,$H_i$ 是全单模的。

对于 $H_6$,共有 5 条边,分别是 $E_1 = \{x_1,x_3,x_5\}$,$E_2 = \{x_1,x_3,x_6\}$,$E_3 = \{x_1,x_4,x_6\}$,$E_4 = \{x_2,x_4,x_6\}$,$E_5 = \{x_2,x_5\}$。

由于边数少,故较易由定理 4 来直接验证它是单模的。下面用定理 7 的推论来证明。由于 $r(H_6) = 3$,故仅需证明 $H_6$ 是平衡的即可。在 $H_6$ 中仅有两个 3- 圈:$(x_1,E_1,x_3,E_2,x_6,E_3,x_1)$ 和$(x_1,E_3,x_4,E_4,x_6,E_2,x_1)$。显然它们分别存在边 $E_2$,$E_3$ 含对应圈上的 3 个顶点。至于 5- 圈,此时它含 $H_6$ 中的所有边和 5 个顶点。故不管 $H_6$ 中的那个顶点在不在圈上,均有边含圈上的 3 个顶点。故 $H_6$ 是平衡的。

5. 原题有误。如矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

中不存在每个元素大于或等于 $B_3$ 中对应元素的 3 阶子方阵,但 $A$ 不是全单模的。

但从本题后面的括号看,它应是另一个命题(见 F.G. Commoner, Networks 3 [1973])。为了叙述它,下面先给出相关定义。

对以 0,1 和 $-1$ 为元素的矩阵 $A = (a_{ij})$ 构作一个二部有向图 $D = (X,Y;A)$,这里为了方便,仍用 $A$ 表示$D$的弧集,$V = X \cup Y$ 为顶点集,其中 $X$ 对应矩阵 $A$ 的行,$Y$ 对应$A$ 的列。若 $a_{ij} = 1$,令$(x_i,y_j) \in A$;若 $a_{ij} = -1$,令$(y_j,x_i) \in A$。

若 $a = (p,q)$,则记 $a^{-1} = (q,p)$,$a^- = p$,$a^+ = q$。定义

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & 若(x,y) \in A \\ -1 & 若(y,x) \in A \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

于是 $D$ 的邻接矩阵是$A = (a_{ij})$,其中 $a_{ij} = \delta(x_i,y_j)$。

定义函数 $f: X \to \{0,1,-1\}$及函数 $g_f: Y \to \mathbf{N}$ 为

$$g_f(y) = \sum_{x \in X} f(x)\delta(x,y)$$

对 $p \in X \cup Y$,记

$$\Gamma^+(p) = \{q \mid q \in X \cup Y, (p,q) \in A\}$$

$$\Gamma^-(p) = \{q \mid q \in X \cup Y, (q,p) \in A\}$$

$$\Gamma(p) = \Gamma^+(p) \cup \Gamma^-(p)$$

则对任意 $y \in Y$,有

$$g_f(y) = \sum_{x \in \Gamma^-(y)} f(x) - \sum_{x \in \Gamma^+(y)} f(x) \tag{1}$$

令 $S^+ = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$,$S^- = \{x \in X \mid f(x) = -1\}$,则(1)等价为:

$$g_f(y) = |S^+ \cap \Gamma^-(y)| - |S^- \cap \Gamma^-(y)| - |S^+ \cap \Gamma^+(y)| - |S^- \cap \Gamma^+(y)| \tag{2}$$

对于 $D = (X, Y; A)$ 中一条途径 $P = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$,其中 $a_i^+ = a_{i+1}^-$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$。定义 $P$ 的符号为 $\delta(P) = \prod_{i=1}^{n} \delta(a_i)$,类似可定义圈的符号。

**命题** 令 $A$ 是以 0,1 和 −1 为元素的矩阵,$D$ 是以 $A$ 为邻接矩阵的二部有向图。若 $D$ 中每个圈的符号均为 1,则 $A$ 是全单模的。

**证** 要证 $A$ 是全单模的,由 Ghouila-Houri 的定理,只需证对每个 $S \subseteq X$,存在一个 2- 分划 $S^+$ 和 $S^-$,使得对每个 $y \in Y$,有

$$|S^+ \cap \Gamma^-(y)| - |S^- \cap \Gamma^-(y)| - |S^+ \cap \Gamma^+(y)| + |S^- \cap \Gamma^+(y)| \in \{0, 1, -1\} \tag{3}$$

记 $D' = D - (X - S)$,由于 $D'$ 中的圈也是 $D$ 中的圈,所以 $D'$ 中的圈的符号均为 1。因此下面仅需证明 $S = X$ 的情况。

对 $y \in Y$,令 $S(y) = \Gamma(y)$,若 $|\Gamma(y)|$ 为偶数;$S(y) = \Gamma(y) - \{x\}$,若 $|\Gamma(y)|$ 为奇数,这里 $x \in \Gamma(y)$。令 $\theta(y)$ 为 $S(y)$ 中一个两两不交的 2- 元子集簇,其并为 $S(y)$,则对任意 $\{a, b\} \in \theta(y)$,$((a, y), (y, b))$ 是 $D$ 中的一条路,记为 $P(a, y, b)$,其符号为

$$\delta(P(a,y,b)) = \delta(a,y) \cdot (-\delta(b,y)) = \begin{cases} 1 & 若\ \delta(a,y) = -\delta(b,y) \\ -1 & 若\ \delta(a,y) = \delta(b,y) \end{cases}$$

因此有 $\delta(P(a,y,b)) = \delta(P(b,y,a))$。

下面定义图 $G = (X, E, \Psi)$,其中

$$E = \{e_{y;a,b} \mid y \in Y, \{a,b\} \in \theta(y)\}$$

$$\Psi = (e_{y;a,b}) = \{a, b\}$$

由 $\delta(P(a,y,b)) = 1\ (-1)$,称边 $e_{y;a,b}$ 是偶(奇)的。则有

“$G$ 中任一闭迹含偶数条奇边”

事实上,设 $\mu = (e_0, e_1, \cdots, e_{n-1})$ 是 $G$ 的一条闭迹。由 $G$ 的构造,$\mu$ 中的每一条边 $e_i = (a_i, b_i)$,对应 $D$ 中的一条路 $P(a_i, y_i, b_i)$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$,且两两不含公共弧,除非 $e_{y_i;a_i,b_i} = e_{y_j;a_j,b_j}$。于是 $C = P(a_0, y_0, b_0)P(a_1, y_1, b_1)\cdots P(a_{n-1}, y_{n-1}, b_{n-1})$,这里 $b_i = a_{i+1}$,是 $D$ 中的一个圈。由于 $D$ 中每一个圈的符号均为 1,故有 $1 = \delta(C) = \prod_{i=0}^{n-1} \delta(P(a_i, y_i, b_i))$。故使 $\delta(P(a_i, y_i, b_i)) = -1$ 的 $i$ 的个数是偶数。所以 $\mu$ 中的奇边

有偶数条。

下面证明还用到 König 定理在二部图中的一个推广形式(见 F. Harary, R. Norman, P. Cartaright, Structural models: An introduction to the theory of directed graphs, Wiley, 1965):

"若 $F$ 是图 $G$ 的一个边子集,且 $G$ 中每个圈均含有 $F$ 中的偶数条边,则 $G$ 的顶点集存在一个 2- 分划,使 $G$ 的边在 $F$ 中的充要条件是:它的端点在分划的不同集合中。"

对 $X$ 存在一个分划 $X^+$ 和 $X^-$,使得对一切 $y\in Y$ 和 $\{a,b\}\in\theta(y)$,若 $\delta(P(a,y,b))=-1$,则 $\{a,b\}$ 中的两顶点分属 $X^+$,$X^-$;若 $\delta(P(a,y,b))=1$,则 $\{a,b\}\subseteq X^+$ 或 $X^-$。下面证明 $X$ 的这分划满足(3)。

令

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{若 } x\in X^+\\ -1 & \text{若 } x\in X^-\end{cases}$$

于是对每个 $y\in Y$,有

$$\begin{aligned} g_f(y) &= \sum_{x\in\Gamma(y)} f(x)\delta(x,y)\\ &= \sum_{x\in S(y)} f(x)\delta(x,y)+\sum_{x\in\Gamma(y)-S(y)} f(x)\delta(x,y) \end{aligned}\tag{4}$$

因为对于 $\{a,b\}\in\theta(y)$,若 $\delta(a,y)=\delta(b,y)$,则 $\delta(P(a,y,b))=-1$,因此 $a$ 和 $b$ 分别属于 $X^+$ 和 $X^-$ 中,故有 $f(a)=-f(b)$;若 $\delta(a,y)=-\delta(b,y)$,则 $\delta(P(a,y,b))=1$,故有 $f(a)=f(b)$。所以对一切 $\{a,b\}\in\theta(y)$,有 $f(a)\delta(a,y)+f(b)\delta(b,y)=0$。故(4)中右端第一项

$$\sum_{x\in S(y)} f(x)\delta(x,y)=\sum_{\{a,b\}\in\theta(y)}[f(a)\delta(a,y)+f(b)\delta(b,y)]=0$$

注意到 $|\Gamma(y)-S(y)|\leqslant 1$,$f$,$\delta$ 均取值为 0,1,或 $-1$,所以(4)中右端第二项等于 0,1 或 $-1$。故对每个 $y\in Y$,有 $g_f(y)\in\{0,1,-1\}$。于是由(2)得(3)式成立。从而由 Ghouila-Houri 的定理,$A$ 是全单模的。

6. 令 $H_1=H-E$。由于二部图 $G$ 是单模的,故 $H_1$ 为单模超图。从而 $H_1$ 有均匀 2- 着色,设为 $(F_1,F_2)$,即对每个星 $S$,有 $||F_1\cap S|-|F_2\cap S||\leqslant 1$。若 $||F_1|-|F_2||\leqslant 1$,则 $(F_1,F_2)$ 就是 $H$ 的均匀 2- 着色。若 $||F_1|-|F_2||>1$,不妨设 $|F_1|>|F_2|$,则在 $G$ 中存在一条最长的交错迹:

$$P=u_0e_1u_1e_2u_2\cdots u_{l-1}e_lu_l$$

满足 $e_1,e_l\in F_1$,$e_{2i+1}\in F_1$,$e_{2i}\in F_2$ $\left(i=1,2,\cdots,\left[\frac{l}{2}\right]\right)$。令

$$F_1^{(1)}=(F_1-\{e_1,e_3,\cdots,e_l\})\cup\{e_2,e_4,\cdots,e_{l-1}\}$$

$$F_2^{(1)} = (F_2 - \{e_2, e_4, \cdots, e_{l-1}\}) \cup \{e_1, e_3, \cdots, e_l\}$$

则$(F_1^{(1)}, F_2^{(1)})$仍为 $H_1$ 的均匀 2- 着色，且有

$$\left| |F_1^{(1)}| - |F_2^{(1)}| \right| = \left| |F_1| - |F_2| \right| - 1$$

经过若干次上述边着色交换，设为 $k$ 次，可得$\left| |F_1^{(k)}| - |F_2^{(k)}| \right| \leqslant 1$，则$(F_1^{(k)}, F_2^{(k)})$就是 $H$ 的均匀 2- 着色。从而由定理 4 知，$H$ 是单模的。

7. 当 $k = 2$ 时，由定理 8 可知，$H$ 是平衡超图。又由定理 10 知，$H$ 的每个部分超图具有 König 性质，因而有 $\tau(H) \leqslant \nu(H) = (2-1)\nu(H)$。

对于第二部分，Ryser 的猜测是：每个 $k$- 部超图 $H$ 满足

$$\tau(H) \leqslant (k-1)\nu(H)$$

设 $H$ 是一个$k$- 部超图，则 $H$ 有$\chi(H_A) \leqslant k$ $(\forall A \subset X)$。由 Meyniel 的猜测得 $\tau(H) \leqslant (k-1)\nu(H)$，从而 Ryser 的猜测成立。

8. 设 $A = (a_{ij})$ 为完全平衡超图 $H$ 的关联矩阵。由于顶点和边的标号不影响 $H$ 的平衡性，故由引理 1，不失一般性可假设 $A$ 的行、列已同时按逆字典序排列。根据定理 12，$A$ 不含子矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$。

若 $A^{\mathrm{T}}A$ 含有子矩阵$B$。记 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$，其中 $\boldsymbol{a}_j$ 为$A$ 的列矢量，则存在 $i_1 < i_2$ 和 $j_1 < j_2$ 满足

$$\begin{bmatrix} (\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{j_1}) & (\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{j_2}) \\ (\boldsymbol{a}_{i_2}, \boldsymbol{a}_{j_1}) & (\boldsymbol{a}_{i_2}, \boldsymbol{a}_{j_2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

不失一般性可设 $i_1 \leqslant j_1$。

由$(\boldsymbol{a}_{i_2}, \boldsymbol{a}_{j_1}) = 1$ 可知，$A$ 中存在一个最大行标 $r_1$，满足 $a_{r_1 i_2} = a_{r_1 j_1} = 1$。由于$(\boldsymbol{a}_{i_2}, \boldsymbol{a}_{j_2}) = 0$，故有 $a_{r_1 j_2} = 0$。

由$(\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{j_1}) = 1$，则$A$ 中存在一个最大的行标$k_1$，满足$a_{k_1 i_1} = a_{k_1 j_1} = 1$；同样由$(\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{j_2}) = 1$，在 $A$ 中存在最大的一个行标 $k_2$，使 $a_{k_2 i_1} = a_{k_2 j_2} = 1$。

若 $k_1 < k_2$，则 $j_1 \neq i_1$ 且由 $k_1, k_2$ 的选取可知，$a_{k_2 j_1} = 0$，此时由 $A$ 的第$k_1, k_2$行和第 $i_1, j_1$ 列构成一个子矩阵 $B$，矛盾；同样若 $k_2 < k_1$，则 $i_1 \neq j_1$ 且 $a_{k_1 j_2} = 0$，则由 $A$ 的第$k_2, k_1$ 行和 $i_1, j_2$ 列构成一个子矩阵 $B$，矛盾。故 $k_1 = k_2 = r_2$，即 $a_{r_2 i_1} = a_{r_2 j_1} = a_{r_2 j_2} = 1$。

由$(\boldsymbol{a}_{i_2}, \boldsymbol{a}_{j_2}) = 0$ 可知，$a_{r_2 i_2} = 0$ 且 $i_2 \neq j_2$。

若 $r_2 < r_1$，则由 $A$ 中第$r_2, r_1$ 行和 $j_1, j_2$ 列构成一个子矩阵 $B$，矛盾。故 $r_1 <$

$r_2$。

若 $j_1 < i_2$，则由 $A$ 的第 $r_1, r_2$ 行和 $j_1, i_2$ 列构成一个子矩阵 $B$，矛盾。故 $i_2 < j_1$。

因为 $A$ 的列按逆字典序排列，且 $a_{r_2 i_1} = 1, a_{r_2 i_2} = 0, \boldsymbol{a}_{i_1} \gtrless \boldsymbol{a}_{i_2}$，故存在一行标 $r_3$，使 $r_3 > r_2, a_{r_3 i_1} = 0, a_{r_3 i_2} = 1$，则由 $r_1$ 的选择，$a_{r_3 j_1} = 0$。因此由 $A$ 的第 $r_1$，$r_3$ 行和 $i_2, j_1$ 列构成 $A$ 的一个子矩阵$B$，矛盾。故 $A^{\mathrm{T}}A$ 中不含子矩阵$B$。由定理 12 知，$A^{\mathrm{T}}A$ 是完全平衡的。

下面由于 $A^{\mathrm{T}}A$ 是完全平衡的，从而由定理 12 知，$[I_m, A^{\mathrm{T}}A]$ 也是完全平衡的。用归纳法，若

$$[I_m \quad A^{\mathrm{T}}A \quad (A^{\mathrm{T}}A)^2 \cdots (A^{\mathrm{T}}A)^k]$$

是完全平衡的，则下面矩阵

$$\begin{bmatrix} I_m \\ A^{\mathrm{T}}A \\ (A^{\mathrm{T}}A)^2 \\ \vdots \\ (A^{\mathrm{T}}A)^k \end{bmatrix} [I_m \quad A^{\mathrm{T}}A \quad (A^{\mathrm{T}}A)^2 \cdots (A^{\mathrm{T}}A)^k]$$

$$= \begin{bmatrix} I_m & A^{\mathrm{T}}A & (A^{\mathrm{T}}A)^2 & \cdots & (A^{\mathrm{T}}A)^k \\ A^{\mathrm{T}}A & (A^{\mathrm{T}}A)^2 & (A^{\mathrm{T}}A)^3 & \cdots & (A^{\mathrm{T}}A)^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (A^{\mathrm{T}}A)^k & (A^{\mathrm{T}}A)^{k+1} & (A^{\mathrm{T}}A)^{k+2} & \cdots & (A^{\mathrm{T}}A)^{k+k} \end{bmatrix}$$

也是完全平衡的，故$(A^{\mathrm{T}}A)^{k+1}$ 也是完全平衡的。所以由归纳法知$(A^{\mathrm{T}}A)^k$ $(k = 1, 2\cdots)$ 均是完全平衡的。

9. 设 $H$ 的关联矩阵为$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$。由引理，不妨设 $A$ 的行、列已按逆字典序排列，则 $H + (X)$ 和 $H + (E_1 \cap E_2)$ 的关联矩阵分别为 $A_1 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{J})$和 $A_2 = (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$，其中 $\boldsymbol{J} = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_0 = (a_{11}a_{12}, a_{21}a_{22}, \cdots, a_{m1}a_{m2})^{\mathrm{T}}$。易见 $A_1, A_2$ 的行、列也是按逆字典序排列的。

因为 $H$ 是完全平衡的，故由定理 12 知，$A$ 中不含子矩阵$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$。在 $A_1$ 中，$J$ 的元素全为 1，故 $A_1$ 中不含子矩阵 $B$。若 $A_2$ 中含子矩阵 $B$，设 $B$ 由$A_2$ 的第 $i_1, i_2$ 行和 $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_j$ 列组成，则 $a_{i_1 1} = a_{i_1 2} = a_{i_2 1} = a_{i_2 2} = 1$ 且 $j \geqslant 3$。因此 $A$ 中含子矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 j} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = B$$

矛盾。故 $A_2$ 中也不含子矩阵 $B$。由定理 12,$H+(X)$ 和 $H+(E)$ 是完全平衡的。

10. 设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是 $X$ 上的 $n$ 阶超图。根据树形超图的定义及定理 10 的推论,易知完全平衡超图是树形超图。又由定理 14,对每个树形超图 $H$,存在 $X$ 上的一棵树 $T$,使得对任意 $E\in H$,有 $T[E]$ 为 $T$ 的子树,称 $T$ 为 $H$ 的底树。

由 $H$ 及 $T$ 树构造另一超图 $H'=H|T$:以 $T$ 的边为 $H|T$ 的顶点,$H|T=(F|F\subset E(T)$,且 $V(F)\in H)$。即对于树 $T$ 来说,边集 $F$ 的边诱导子图等于点集 $E_i$ 的诱导子图,均为 $T$ 的相同子树,且有

(1) $|H|T|=m-\{H$ 中环的个数$\}$

$H|T$ 还有如下性质:

(2) 设 $H$ 是树形超图,底树为 $T$,则 $H$ 是完全平衡超图的充要条件是:$H|T$ 是完全平衡的。

事实上,因为由 $H'=H|T$ 的定义,$H'$ 中的边 $E'$ 与 $H$ 的边 $E$ 一一对应,它们分别为 $H$ 中的底树 $T$ 中某一子树的边集和顶点集。下面来证明(2)。

"⇐"。若 $H$ 不是完全平衡的,则 $H$ 中存在长度大于 3 的圈 $C=(x_1,E_1,x_2,E_2,\cdots,x_k,E_k,x_1)$,不存在圈上的边包含圈上的 3 个顶点(下面简称为简单圈)。定义 $T(V)$ 为 $T$ 中含 $V=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ 的极小子树,显然 $V$ 是 $T(V)$ 的悬挂点集合。令 $T(V)$ 中对应的悬挂边为 $e_1,e_2,\cdots,e_k$,于是圈

$$C'=(e_1,E'_1,e_2,E'_2,\cdots,e_k,E'_k,e_1)$$

是 $H'$ 中的简单圈。这与 $H'$ 是全单模的相矛盾。

"⇒"。由于"⇒"的证明是可逆的,故结论成立。

为了得到结论,还需推导如下两个结论:

(3) 若 $H$ 是完全平衡超图,其底树为 $T$,则 $H'=H|T$ 具有一棵底树 $T'$,满足 $T'$ 的任一子树的顶点集是 $T$ 中某棵子树的边集。

事实上,若令 $T$ 中的闭邻域 $\Gamma'[v]$,$v\in V(H)$ 在 $H$ 上的诱导子超图为 $H(v)$,显然 $H(v)$ 是完全平衡的。故存在底树 $T'(v)$,$v\in V(H)$,则这些 $T'(v)$ 的并 $T'$ 是 $H|T$ 的底树,且若 $(e_1,e_2)\in E(T')$,则 $e_1,e_2$ 是 $T$ 中两条相邻的边。

反复利用(3),我们可构造一个新的超图 $H^t$:

首先用下面方法构造一个树序列 $t=(T_0,T_1,\cdots,T_{n-1})$,对 $1\leqslant i\leqslant n-1$ 的 $i$ 满足如下性质:

(a) $T_i$ 的顶点为 $N$ 中的 $(i+1)$- 元子集,这里 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 为 $T_0$ 的顶点集;

(b) $V(T_i)=\{x\cup y|x,y\in V(T_{i-1}),(x,y)\in E(T_{i-1})\}$;

(c) $(u,v)\in E(T_i)$ 蕴含了 $u=x\cup y, v=y\cup z$,对某些 $x,y,z\in V(T_{i-1})$ 成立。

现在定义 $H^r$ 为 $V(H^r)=N$,其边集为:

$$E(H^r)=\{x\subset N|x\in V(T_i),\text{对某个 } i,1\leqslant i\leqslant n-1\}$$

易证 $H^r$ 仍然是一个完全平衡超图。

事实上,考虑超图 $H_k^r$ $(0\leqslant k\leqslant n-1)$,其 $V(H_k^r)=V(T_k)$,

$$E(H_k^r)=\{x\subset V(T_k)|\bigcup_{v\in x}v\in V(T_i),\text{对某个 } k\leqslant i\leqslant n-1\}$$

显然 $H_{n-1}^r$ 由于它仅有一个顶点,故它是一个平凡的完全平衡超图。而 $H_0^r=H^r$。下面对 $k$ 进行逆序归纳来证明任一超图 $H_k^r$ 均是完全平衡的。由(b)和(c),若 $x_1\cup y_1,\cdots,x_p\cup y_p$ 是 $T_i$ 中子树的顶点集,则对应的边 $(x_1,y_1),\cdots,(x_p,y_p)$ 在 $T_{i-1}$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 中诱导出一棵子树。故有 $H_{k-1}^r|T_{k-1}\simeq H_k^r$。于是由归纳法假设 $H_k^r$ 是完全平衡的及(2)知,$H_{k-1}^r$ 也是完全平衡的。从而知 $H^r$ 是完全平衡超图。

(4) 任一完全平衡超图 $H_0$ 均同构于某个超图 $H^r$ 中的部分子超图。

这是因为对 $H_0$,我们可按上述构造树序列 $T_0,T_1,\cdots,T_{n-1}$ 及 $H^r$,对每个 $i$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 可定义 $H_i$ 如下:

$$V(H_i)=\{x\cup y|x,y\in V(T_{i-1}),(x,y)\in E(T_{i-1})\}$$

和

$$E(H_i)=\{e\subset V(H_i)|\bigcup_{v\in e}v\in E(H_{i-1})\}$$

若 $H_{i-1}$ 是完全平衡超图,其底树为 $T_{i-1}$,由(2)知 $H_i\simeq H_{i-1}|T_{i-1}$ 也是完全平衡的。令 $T_i$ 是对应于(3)中 $H_i$ 的底树,于是由此得到的树序列满足(a),(b)和(c),且 $H_0$ 中的 $k$- 元边集是 $T_{k-1}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 中的顶点。因此有 $H_0\subseteq H^r$。

由(4)易见无重边的全平衡超图达到极大时,它同构于 $H^r$,而在 $H^r$ 中,含 $k$ 个元的边数目不超过 $n-k+1$,且可达到 $n-k+1$ $(1\leqslant k\leqslant n)$,所以顶点数为 $n$ 的完全平衡超图的边数不超过

$$1+2+\cdots+n=\binom{n+1}{2}$$

且在 $H^r$ 时可达。

11. 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$,$F_0$ 是 $L(H)$ 的一个森林。

若 $F_0$ 中含有边,设 $u=[e_i,e_j]$ 是 $F_0$ 中任意一条边。令 $E_i\cap E_j=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$,作 $F'_0=F_0-u$。

因为 $F_0$ 是森林,$F_0[X_1]$,$F_0[X_2]$,$\cdots$,$F_0[X_k]$ 也是森林,并且均含有边 $u$,故在 $F'_0$ 中有

$$p(F'_0[X_i])=p(F_0[X_i])+1 \qquad (i=1,2,\cdots,k)$$

从而有

$$w(F'_0)=w(F_0)-w(u)=w(F_0)-k$$

故有

$$\sum_{i=1}^{n}p(F_0[X_i])+w(F_0)=\sum_{i=1}^{n}p(F'_0[X_i])+w(F'_0)$$

由于上式对 $F_0$ 中任意一条边成立。重复这一过程，逐次将 $F_0$ 中的所有边一一删除，得到一个不含边的森林 $F''$，仍有

$$\sum_{i=1}^{n}p(F_0[X_i])+w(F_0)=\sum_{i=1}^{n}p(F''[X_i])+w(F'')$$

注意到 $w(F'')=0,p(F''[X_i])=|X_i|\ (i=1,2,\cdots,n)$，于是有

$$\sum_{i=1}^{n}p(F_0[X_i])+w(F_0)=\sum_{i=1}^{n}|X_i|$$

最后由 $X_i$ 的定义，有

$$\sum_{i=1}^{n}p(F_0[X_i])+w(F_0)=\sum_{j=1}^{m}|E_j|$$

现在取 $F$ 为 $L(H)$ 中权最大的一个森林，即此时有 $w(F)=w_H$。由 $\mu(H)$ 的定义及上式可得

$$\begin{aligned}\mu(H)&=\sum_{j=1}^{m}|E_j|-[X]-w_H\\&=\sum_{i=1}^{n}p(F[X_i])+w(F)-|X|-w_H\\&=\sum_{i=1}^{n}[p(F[X_i])-1]\end{aligned}$$

12. 令 $S$ 为与 $G$ 中任一余圈均相交且达到权值最小的弧集，记其最小权值为 $w$。下面由 $G$ 的边 $i$ 及 $c_i\geqslant 0$ 来构造一个新的有向图 $G'$ 如下：若 $i\in S$，则用一条长为 $c_i$ 的有向路，其方向与 $i$ 相同，来代替 $G$ 中的 $i$；若 $i\notin S$，则用与 $i$ 方向相同的 $c_i$ 条平行弧来代替 $G$ 中的 $i$，最后所得的有向图记为 $G'$。在 $G'$ 中的每一条弧其权均定义为 1。易知 $G'$ 中由 $S$ 所对应的弧集 $S'$ 与 $G'$ 中任一余圈均相交且弧数达到最小，显然有 $|S'|=w$。令 $G'$ 中每一条弧被 $G'$ 中余圈簇覆盖不大于 $c'_i\equiv 1$ 次的余圈簇中的最大余圈数目记为 $k$，即 $G'$ 中两两不交的最大余圈数目为 $k$。显然有 $w\geqslant k$。故下面仅需证明其反向不等式。为此需先定义几个概念：$G'$ 中的一条有向路，若其上相继的弧的头或尾相互相接，则称它为 $G'$ 中一条 $AD$-路。令 $G'$ 中的弧子集 $A$ 中的弧为粗弧，$G'$ 中不属于 $A$ 的弧为细弧。对顶点 $v$，若它的入(出)弧集中含 $A$ 中的弧，则称 $v$ 是关于 $A$ 的入(出)饱和点，否则称为关于 $A$ 的非入(出)饱和

点。若 $G'$ 中的一条 $AD$- 路 $P: v_1e_1v_2e_2\cdots v_ke_kv_{k+1}$ $(k=2l+1)$，其中 $e_1$ 和 $e_2,e_4,\cdots,e_{2l}$ 为粗的，$P$ 上其余弧为细的。又若 $v_1$ 是关于 $A$ 的入(出)饱和点，$v_{2l+2}$ 是关于 $A$ 的非出(入)饱和点，特别当 $v_1=v_{k+1}$ 为其退化情形，则称 $P$ 为 $G'$ 中关于 $A$ 的平衡出(入)路。对上述 $P$，令 $A'=(A\setminus\{e_1,e_2,\cdots,e_{2l}\})\cup\{e_3,e_5,\cdots,e_{2l+1}\}$，又将原来 $v_1,v_3,\cdots,v_{2l+1}$ 的子入(出)弧集构成的余圈簇换成 $v_2,v_4,\cdots,v_{2l+1}$ 子出(入)弧集构成的余圈簇，将上述过程称为**平衡交错变换**。下面对 $G'$ 要证明如下命题：

$G'$ 中存在一个 $G'$ 中顶点的出弧子集或入弧子集构成的两两不交的余圈簇 $\mathscr{C}'$ 覆盖 $G'$，且 $\mathscr{C}'$ 中每一余圈恰含 $S'$ 中的一条弧。

下面对 $G'$ 给出一个算法性证明。不失一般性，可假定 $G'$ 的底图连通，且假定 $G'$ 的顶点可排序成 $v_1,v_2,\cdots,v_n$，使得 $G_k=G'[\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}]$ 的底图仍连通。令 $S_k$ 为与 $G_k$ 中任一余圈均相交且弧数达到最少的弧集，并满足当 $G_k$ 变为 $G_{k+1}$ 时产生关于 $S_k$ 的平衡出(入)路最多。令 $\mathscr{C}_k$ 是具有像 $\mathscr{C}$ 覆盖 $G'$ 那样性质的覆盖 $G_k$。显然 $G_1,G_2$ 命题成立。设 $G_1,G_2,\cdots,G_k$ $(k\geqslant 2)$ 命题成立，下面证明 $G_{k+1}$ $(k+1\leqslant n)$ 命题也成立。事实上 $G_{k+1}$ 是由 $G_k$ 与 $v_{k+1}$ 连以若干弧而得，故有 $|S_{k+1}|\leqslant|S_k|+2$。注意到在 $G_k$ 中不存在关于 $S_k$ 的平衡出(入)路。故在 $G_{k+1}$ 中以 $S_k$ 为基础求 $S_{k+1}$ 时，至多有一条关于 $S_k$ 的平衡出路和一条关于 $S_k$ 的平衡入路，且其终点一定是 $v_{k+1}$，对上述的关于 $S_k$ 的平衡出(入)路进行平衡交错变换，即可得 $S_{k+1}$ 及 $\mathscr{C}_{k+1}$。故命题对 $G_{k+1}$ 成立。从而命题对 $G_n=G'$ 成立，且 $\mathscr{C}_n=\mathscr{C}'$。注意到 $2\mathscr{C}'$ 满足题目中给出的 Lovász 定理的覆盖簇条件，故由该定理有 $2w\leqslant 2|\mathscr{C}'|\leqslant 2k$，即 $w\leqslant k$。

综上所述，可得 $w=k$。即本题结论成立。

13. 首先证明 $\tau_{60}(H')=60\tau^*(H')$ $(\forall H'\subset H)$。

任取 $i\neq j\in\{1,2,3,4\}$ 或 $k\in\{5,6,7\}$，作 $H'=H-\{E_i,E_j\}$ 或 $H'=H-E_k$。易知 $H'$ 是一个星。故

$$\nu(H')=1=\tau(H')$$

显然，若在 $H$ 中去掉的边数大于 2，则 $H'$ 仍然是一个星，上式仍然成立。故对上述的 $H'$，(ⅰ)、(ⅱ) 同时成立。

下面考察 $H'=H-E_i$ $(1\leqslant i\leqslant 4)$ 的情况。不妨设 $H'=H-E_1$。取分数横贯 $t(2)=t(4)=t(6)=0,t(1)=t(3)=t(5)=t(7)=t(8)=t(9)=\frac{1}{5}$，则有 $\tau^*(H')\leqslant\frac{6}{5}$。再取分数匹配 $m(E_1)=0,m(E_2)=m(E_3)=m(E_4)=$

$m(E_5)=m(E_6)=m(E_7)=\frac{1}{5}$,则 $\nu^*(H')\geq\frac{6}{5}$。由于 $\tau^*(H')=\nu^*(H')$,故有 $\tau^*(H')=\nu^*(H')=\frac{6}{5}$。因为该式分数横贯的 $t$ 值是$\frac{1}{5}$ 的整数倍,故有 $5\tau^*(H')=\tau_5(H')$。于是根据第 3 章习题的第 4 题,有

$$60\tau^*(H')=\tau_{60}(H')$$

最后对于 $H$,取分数横贯

$$t(1)=t(2)=\cdots=t(6)=\frac{1}{12},\qquad t(7)=t(8)=t(9)=\frac{1}{4}$$

及分数匹配

$$m(E_1)=m(E_2)=m(E_3)=m(E_4)=\frac{1}{8}$$

$$m(E_5)=m(E_6)=m(E_7)=\frac{1}{4}$$

类似可得 $\nu^*(H)=\tau^*(H)=\frac{5}{4}$。同样也有

$$60\tau^*(H)=\tau_{60}(H)$$

故对一切 $H'\subset H$,有 $60\tau^*(H')=\tau_{60}(H')$。

因为$\frac{1}{8}$ 不是$\frac{1}{60}$ 的整数倍,所以

$$\nu_{60}(H)<60\nu^*(H)=60\tau^*(H)$$

14. (ⅱ)⇒(ⅰ)。显然。

(ⅰ)⇒(ⅱ)。反证法:设 $H^c$ 是满足$\tau^*(H^c)<\tau(H^c)$和$\tau^*(H^c)$为整数的点数最少的超图。由于去掉 $H^c$ 中的一个顶点相当于把$c$ 中对应的这个分量 1 变为 0,所得矢量记为 $c'$,因此 $H^{c'}$ 就是在 $H^c$ 中去掉一个顶点后所得的超图。由假设,$\tau^*(H^{c'})=\tau(H^{c'})$。设

$$\tau^*(H^c)=\min\{\langle c,t\rangle\mid t\in\mathbf{R}^n,t\geq\mathbf{0},A^{\mathrm{T}}t\geq 1\}=\langle c,t^0\rangle$$

于是存在 $i_0$,使得 $c_{i_0}t^0_{i_0}\neq 0$,不妨设 $i_0=1$。设

$$\tau'(H^{c'})=\tau(H^{c'})=\min\{\langle c',t\rangle\mid t\in\mathbf{N}^n,A^{\mathrm{T}}t\geq 1\}=\langle c',t'\rangle$$

由 $c'$ 的取法,有

$$\langle c,t'\rangle\geq\langle c,t^0\rangle\geq\langle c',t^0\rangle\geq\langle c',t'\rangle$$

和

$$\langle c,t'\rangle-\langle c',t'\rangle=t'_1=0\text{ 或 }1$$

若 $t'_1=0$,则$\langle c,t'\rangle=\langle c,t^0\rangle=\tau^*(H^c)$,则有 $\tau^*(H^c)=\tau(H^c)$,矛盾。

若 $t'_1=1$,则

$$\langle c,t'\rangle=\langle c',t'\rangle+1$$

$$\geqslant \langle c, t^0 \rangle = \langle c', t^0 \rangle + t_1^0$$
$$\geqslant \langle c', t' \rangle + t_1^0$$

因为 $t_1^0 \neq 0, 0 < t_1^0 \leqslant 1$,又因为 $\tau^*(H^c) = \langle c, t^0 \rangle$ 为整数,故有

$$\langle c, t' \rangle = \langle c, t^0 \rangle = \tau^*(H^c)$$

于是有

$$\tau(H^c) \leqslant \langle c, t' \rangle = \tau^*(H^c)$$

因此,由第 3 章中的定理 1 知,$\tau(H^c) = \tau^*(H^c)$,矛盾。这就证明了(i)蕴含(ii)。

15. (i)⇒(ii)。由第 3 章中的定理 1 知,

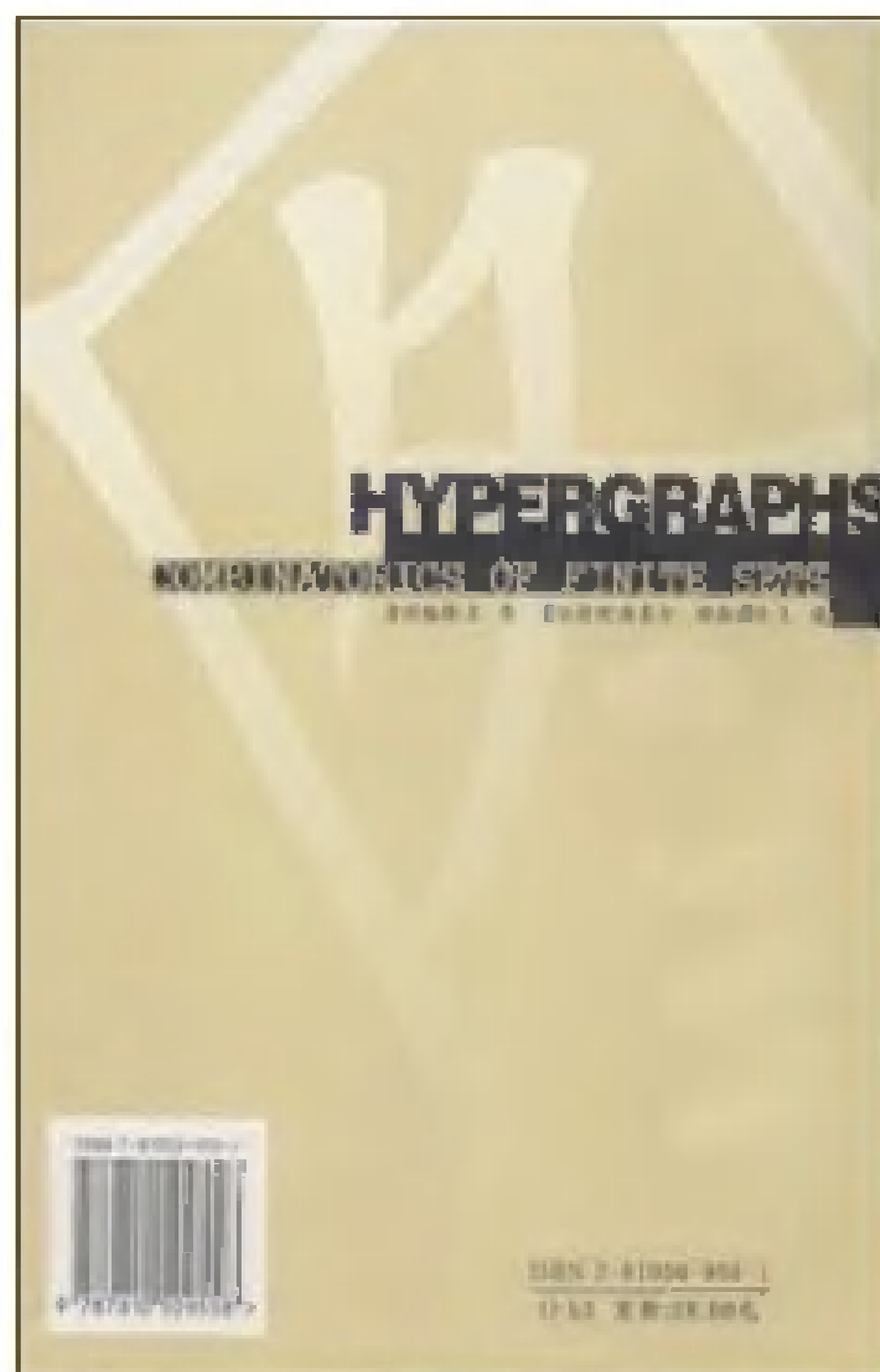
$$\nu(H^c) \leqslant \tau^*(H^c) \leqslant \tau(H^c)$$

再由(i)即可得

$$\nu(H^c) = \tau^*(H^c) \qquad (\forall c \in \{0,1\}^n)$$

(ii)⇒(i)。由(ii)知,$\tau^*(H^c)$ 是整数,由本章习题的第 14 题可知,$\tau^*(H^c) = \tau(H^c)$。再由(ii)得

$$\nu(H^c) = \tau(H^c) \qquad (\forall c \in \{0,1\}^n)$$


HYPERGRAPHS